Saberes básicos

Competencias clave / Actividades / Situaciones de aprendizaje

1 Competencia en comunicación lingüística (CCL).	Situaciones de aprendizaje
2 Competencia plurilingüe (CP).	Colaborativo
3 Competencia matemática y competencia en ciencia y tecnología (STEM).	En pareja
4 Competencia digital (CD).	Sostenibilidad y medioambiente

Competencias clave / Actividades / Situaciones de aprendizaje
5 Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA).
6 Competencia ciudadana (CC).
7 Competencia emprendedora (CE).
8 Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC)

UNIDAD 2

Divisibilidad

En esta unidad aprenderás a...

- Decidir si un número natural es múltiplo o divisor de otro.
- Hallar todos los divisores de un número natural.
- Conocer y aplicar correctamente los criterios de divisibilidad de 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 y 11.
- Reconocer cuándo un número es primo o es compuesto.
- Descomponer un número natural como producto de números primos.
- Calcular el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor de dos o más números naturales.
- Resolver problemas que involucren los conceptos anteriores.

Ya los griegos quedaron fascinados por algunas «casualidades» relativas a la divisibilidad de números. Entre estas llama la atención la relativa a los *números perfectos*. Se llama perfectos a los números naturales que coinciden con la suma de sus divisores propios, estos son, los que son menores que él. Por ejemplo, 1, 2 y 3 son los divisores de 6 menores que 6 y su suma $1 + 2 + 3 = 6$ coincide con él. Por ello, 6 es un número perfecto. Sin embargo, los divisores de 4 menores que 4 son 1 y 2, cuya suma vale $1 + 2 = 3 \neq 4$, por lo que 4 no es perfecto.

Si sigues probando te convencerás de que no hay muchos números perfectos; ninguno entre 6 y 28 lo es. Sin embargo, 28 sí es un número perfecto. Tanto el 6 como el 28 se pueden escribir como:

$$6 = 2^{2-1}(2^2 - 1) \qquad 28 = 2^{3-1}(2^3 - 1)$$

En los dos casos, el factor de la derecha, que es potencia de 2, menos 1, es un número primo: $2^2 - 1 = 3$ y $2^3 - 1 = 7$. Esto no es casualidad. Euclides probó que si un número natural, m, cumple que $2^m - 1$ es un número primo, entonces el número $2^{m-1}(2^m - 1)$ es perfecto.

Responde

- Elabora una lista de seis números naturales que al dividirlos entre 3 den de resto 0.
- Encuentra dos parejas de números naturales cuyo producto sea 21. ¿Hay más parejas que lo cumplan?
- ¿Es cierto que si sumas tres números impares el resultado es impar? ¿Y si los multiplicas?
- Si subo los escalones del portal de mi casa de 3 en 3 doy 30 pasos. ¿Cuántos pasos dará un gigante que los sube de 10 en 10? (*Concurso de Primavera 2015 Nivel 1*).

1 Múltiplos de un número natural

Un número natural ***m*** **se dice que es múltiplo de otro número natural *a*** si existe otro número natural b tal que:

$$m = a \cdot b$$

Esto es lo mismo que decir que un número natural m es múltiplo de a si la división $m : a$ es exacta.

Ejemplos

- 15 es múltiplo de 3 y de 5, pues: $15 = 3 \cdot 5$
- 91 es múltiplo de 7 y de 13, pues la división $91 : 7 = 13$ es exacta y por tanto:
$$91 = 7 \cdot 13$$
- 14 no es múltiplo de 4, pues la división $14 : 4$ no es exacta.

Notación

En Matemáticas los símbolos $\in$ y $\notin$ significan «pertenece» y «no pertenece» respectivamente.

Así, por ejemplo, para indicar que 21 es múltiplo de 7 pero no de 5 podemos escribir:

$$21 \in \dot{7} \quad \text{y} \quad 21 \notin \dot{5}$$

El conjunto formado por todos los múltiplos de un número natural a se obtiene multiplicando a por todos los números naturales $\{1, 2, 3\ldots\}$ y se denota por $\dot{a}$ o por Mult (a).

Es un conjunto infinito, es decir, **ilimitado.**

Ejemplos

- Mult (3) $= \{3, 6, 9, 12, 15, 18\ldots\}$
- Mult (6) $= \{6, 12, 18, 24, 30, 36\ldots\}$

Propiedades de los múltiplos

1. Todo número es múltiplo de 1.
2. Todo número natural es múltiplo de sí mismo.
3. La suma y la resta de dos múltiplos de a es también múltiplo de a.
4. El producto de dos múltiplos de a es múltiplo de a^2.

Ejemplos

- **Propiedades 1 y 2:**
  - $1 = 1 \cdot 1$
  - $2 = 2 \cdot 1$
  - $3 = 3 \cdot 1$
  - $4 = 4 \cdot 1$
- **Propiedad 3:**
  6 y 9 son múltiplos de 3 y $6 + 9 = 15$ y $9 - 6 = 3$ son múltiplos de 3.
- **Propiedad 4:**
  6 y 12 son múltiplos de 3 y $6 \cdot 12 = 72$ es múltiplo de 9.

Practica y aprende

1. Escribe los cinco primeros múltiplos de:
   a. 11 **b.** 3 **c.** 17
2. De los números 8, 12, 15, 18, 24 y 102 indica cuáles son múltiplos de 2, cuáles son de 3 y cuáles de 6. ¿Qué observas?
3. ¿Todo múltiplo de 9 es también múltiplo de 3? ¿Y al revés?, es decir, ¿todo múltiplo de 3 es también múltiplo de 9? Razona tu respuesta.
4. Demuestra las propiedades 3 y 4.

2 Divisores de un número natural

Un número natural ***a* es divisor de otro número natural *b*** si la división $b : a$ es exacta. Es decir:

$$b = a \cdot c$$

donde c es el cociente de la división, y a y c son divisores de b.

Ejemplos

- La división $12 : 3 = 4$ es exacta, luego $12 = 3 \cdot 4$, por tanto:
  3 y 4 son divisores de 12
- La división $49 : 7 = 7$ es exacta, luego $49 = 7 \cdot 7$, por tanto:
  7 es divisor de 49

Observa

Decir que *a* es divisor de *b* es lo mismo que decir que *b* es múltiplo de *a*.

Por ejemplo:

5 es divisor de 15

y, por tanto,

15 es múltiplo de 5.

Notación

Si *a* es divisor de *b* también se dice que *b* es divisible entre *a*.

El conjunto formado por todos **los divisores de un número natural,** *a,* se denota por:

Div (*a*) y se obtiene dividiendo *a* entre {1, 2, 3… *a*}

y quedándose con todos los divisores y los cocientes de las divisiones que son exactas.

Es un conjunto finito, es decir, **limitado.**

Ejemplos

- Para calcular todos los divisores de 12 realizamos las divisiones:

Dividendo	12	12	12
Divisor	**1**	**2**	**3**
Resto	0	0	0
Cociente	**12**	**6**	**4**

Por tanto, Div (12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

- Para calcular todos los divisores de 72 realizamos las divisiones:

Dividendo	72	72	72	72	72	72	72	72
Divisor	**1**	**2**	**3**	**4**	5	**6**	7	**8**
Resto	0	0	0	0	2	0	2	0
Cociente	**72**	**36**	**24**	**18**	14	**12**	10	**9**

Por tanto, Div (72) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72}

Div (12) = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

$3 \cdot 4 = 12$

$2 \cdot 6 = 12$

$1 \cdot 12 = 12$

Propiedades de los divisores

1. El 1 es divisor de todos los números.
2. El cero no es divisor de ningún número.
3. Todo número es divisor de sí mismo.
4. Si *a* es divisor de *b* y *b* es divisor de *c* entonces *a* es divisor de *c*.

Ejemplo

7 es divisor de 14 y 14 es divisor de 140, luego 7 es divisor de 140.

Practica y aprende

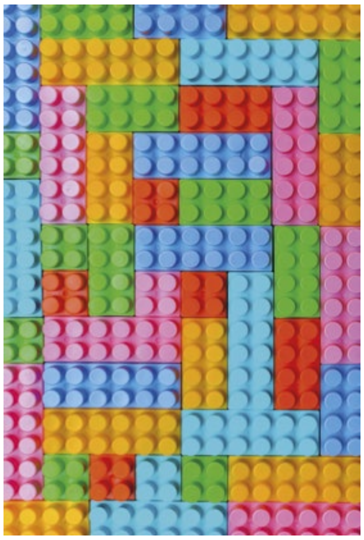
5. Halla todos los divisores de los siguientes números: 7, 9, 20, 25, 36, 41, 49 y 100.
6. En grupos de 4 compañeros, buscad cada uno un número que tenga solo tres divisores. Ponedlo en conjunto y discutid qué tienen en común esos números. Escribid el resultado en una frase, como las personas matemáticas profesionales.
7. ¿Todo divisor de 30 es también divisor de 10? ¿Y viceversa? Razona tu respuesta.
8. Demuestra la propiedad 4 de los divisores.

2.1. Criterios de divisibilidad

Para decidir si un número es divisible entre otro son muy útiles las siguientes reglas prácticas llamadas **criterios de divisibilidad.**

Un número es divisible entre:

	Criterio de divisibilidad	Ejemplo
2	Si su última cifra es par (0, 2, 4, 6, 8).	6, 22, 48, 50…
3	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.	18, 30, 81, 111…
4	Si el número formado por sus 2 últimas cifras es múltiplo de 4 o es cero.	88, 312, 600…
5	Si su última cifra es 0 o 5.	35, 80, 110…
6	Si es divisible entre 2 y entre 3.	42, 84, 132…
9	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.	63, 72, 108…
10	Si su última cifra es 0.	40, 120, 2330…
11	Si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan posición par y las que ocupan posición impar es múltiplo de 11 o es cero.	8580 es múltiplo de 11 pues: $8 + 8 = 16$ y $5 + 0 = 5$ La diferencia: $16 - 5 = 11$



Ejemplos

- ¿Es 3421 divisible entre 3? ¿Y entre 4? ¿Y entre 11?

  No es divisible entre 3, pues la suma de sus cifras es 10, que no es múltiplo de 3.

  No es divisible entre 4 porque 21 no es múltiplo de 4.

  Y sí es divisible entre 11 porque la diferencia entre $3 + 2 = 5$ y $4 + 1 = 5$ es nula: $5 - 5 = 0$.

- ¿Es 63 800 divisible entre 4? ¿Y entre 5? ¿Y entre 10? ¿Y entre 11?

  Es divisible entre 4 porque sus dos últimas cifras son cero.

  También entre 5 y entre 10 porque acaba en 0.

  Y sí es divisible entre 11 porque la diferencia entre:

  $6 + 8 + 0 = 14$ y $3 + 0 = 3$ es $14 - 3 = 11$ que es múltiplo de 11

Practica y aprende

9. Indica cuáles de los siguientes números son divisibles entre los que se dan:

	2	3	4	5	6	9	10	11
12	x	…	…	…	…	…	…	…
18	…	…	…	…	…	…	…	…
40	…	…	…	…	…	…	…	…
84	…	…	…	…	…	…	…	…
100	…	…	…	…	…	…	…	…
1737	…	…	…	…	…	…	…	…
12 430	…	…	…	…	…	…	…	…
300 003	…	…	…	…	…	…	…	…

Juego por parejas

Por parejas, se debe elaborar un tablero con los 36 primeros números naturales.

1	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36

Uno de los 2 jugadores comienza tachando un número par del tablero. Los turnos se van alternando y cada jugador en su turno debe tachar un divisor o un múltiplo del último número que tachó su contrincante y que no esté ya tachado. El primer jugador que ya no pueda tachar ningún número pierde el juego.

3 Números primos y números compuestos

Tal y como hemos visto en el apartado anterior, todo número natural, *a*, tiene por divisores al 1 a sí mismo, pues se puede escribir como $a = a \cdot 1$. Esto da pie a la siguiente definición:

Un número natural *a* es **primo** si sus únicos divisores son el 1 y él mismo. En caso contrario se dice que es **compuesto.**

El 1 es un número especial, con un único divisor, que no consideramos ni primo ni compuesto.

Hay infinitos números primos.

Euclides demostró en su célebre obra *Los Elementos* la existencia de infinitos números primos. Los primeros son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41…

Ejemplos

- Los números 17 y 47 son primos pues:

  Div (17) = {1, 17} y Div (47) = {1, 47}
- Los números 49 y 51 son compuestos.

  Para ello basta observar que 7 es divisor de 49 y 3 es divisor de 51.

3.1. Criba de Eratóstenes

Debemos al astrónomo y matemático griego Eratóstenes de Cirene un procedimiento para obtener de un modo rápido todos los números primos menores que un número dado. A este procedimiento se le conoce como **criba de Eratóstenes.**

Veamos, por ejemplo, cómo hallar todos los números primos menores que 100:

- Para ello elaboramos una tabla como la de la figura y en ella tachamos todos los múltiplos de 2 salvo el 2.
- Tachamos todos los múltiplos de 3 salvo el 3.
- Tachamos todos los múltiplos de 5 salvo el 5 y todos los múltiplos de 7 salvo el 7.

Los múltiplos de 4, 6, 8, 9 y 10 no hay que tacharlos, pues al ser compuestos ya estaban tachados.

Como $10^2 = 100$ ya hemos tachado todos los números compuestos y por tanto los números que no están tachados son los números primos menores que 100.

Números primos menores que 100

~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~	~~30~~
~~11~~	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	~~17~~	~~18~~	~~19~~	~~20~~
1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~

Practica y aprende

10. Indica cuáles de los siguientes números son primos:

a. 63 **c.** 91 **e.** 343

b. 71 **d.** 111 **f.** 531

11. Elabora la lista de todos los primos menores que 150 procediendo como en la criba de Eratóstenes.

12. Halla todos los números primos comprendidos entre 105 y 160.

13. Si hacemos una criba de Eratóstenes para encontrar todos los números primos menores de 600, ¿de qué números primos tenemos que tachar sus múltiplos?

Algunas curiosidades de los números primos

Una de las aplicaciones de los números primos es su uso en el espionaje. No es fácil descomponer un número en factores primos. Hay que ir probando con los números primos divisibles de la cifra que se quiera descomponer. Si se multiplican dos números primos grandes, sería muy difícil de factorizar. Por este motivo, los números primos son perfectos en criptografía para crear códigos secretos indescifrables. Busca información sobre la criptografía y los números primos.

3.2. Descomposición de un número como producto de primos

Todos los números compuestos pueden escribirse como producto de números primos.

Ejemplos

- $4 = 2 \cdot 2$
- $6 = 2 \cdot 3$
- $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$
- $9 = 3 \cdot 3$
- $10 = 2 \cdot 5$…

Cuando un mismo factor aparece varias veces en la descomposición se expresa en forma de potencia.

Ejemplos

- $4 = 2^2$
- $8 = 2^3$
- $12 = 2^2 \cdot 3$
- $16 = 2^4$
- $18 = 2 \cdot 3^2$
- $20 = 2^2 \cdot 5$…

> Todo número natural se puede expresar **de modo único** como producto de potencias cuya base es un número primo.
> A esta forma de expresar cada número se le llama **descomposición en producto de factores primos.**

Para hallar la descomposición de un número:

1. Se escribe el número con una barra vertical a la derecha.

```
36|
  |
```

2. Buscamos un divisor primo y dividimos. Conviene usar los criterios de divisibilidad. Escribimos el divisor a la derecha y el cociente debajo de nuestro número.

```
36| 2
18|
```

3. Buscamos ahora otro primo divisor del cociente anterior y procedemos de la misma manera. El proceso se termina cuando el cociente sea igual a 1.

```
36| 2        36| 2        36| 2
18| 2        18| 2        18| 2
 9|    →      9| 3    →    9| 3
              3|           3| 3
                           1|
```

4. Los números primos escritos a la derecha de la barra nos proporcionan la descomposición buscada.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$

Practica y aprende

14. Halla la descomposición en factores primos de los siguientes números:

a. 12
b. 15
c. 25
d. 42
e. 49
f. 63
g. 77
h. 93
i. 144
j. 147

15. Completa:

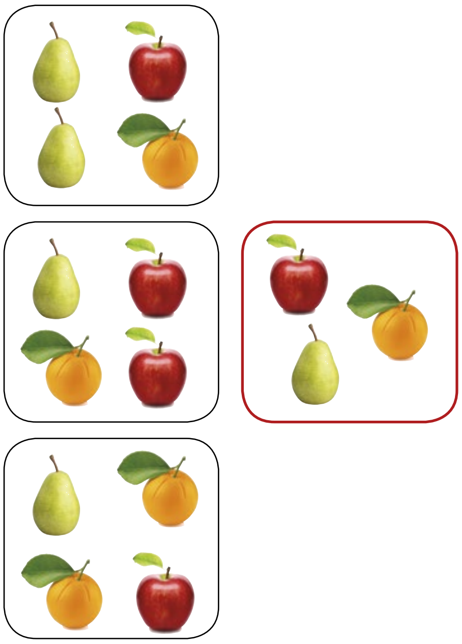
a.
```
60|__
30|__
__| 3  → 60 = ____
 5|__
__|
```

b.
```
84|__
42| 2
__| 3  → 84 = ____
__| 7
__|
```

c.
```
276|__
 __|__
 __| 3  → 276 = ____
 23|__
 __|
```

16. Halla la descomposición factorial de 4, 9, 16, 25, 49, 64, 81 y 121. ¿Qué observas?

4 Máximo común divisor



Se llama **máximo común divisor** de dos o más números al mayor de los divisores comunes a todos ellos.

Se escribe **m.c.d. (*a*, *b*)** para denotar el máximo común divisor de los números *a* y *b*.

Una manera de hallar el máximo común divisor de varios números es hallar todos los divisores de cada uno de ellos y elegir, de entre los comunes, el mayor de ellos.

Ejemplo

Para calcular el máximo común divisor de 9, 12 y 30:

Div (9) = {1, **3**, 9}

Div (12) = {1, 2, **3**, 4, 6, 12} $\longrightarrow$ m.c.d. (9, 12, 30) = **3**

Div (30) = {1, 2, **3**, 5, 6, 10, 15, 30}

Dos números *a* y *b* se dice que son **primos entre sí** cuando:

m.c.d. (*a*, *b*) = 1

Esto sucede cuando no tienen ningún divisor común.

Propiedades básicas del máximo común divisor

- m.c.d. $(a, 1) = 1$ para todo $a \in \mathbb{N}$.
- m.c.d. $(a, a) = a$ para todo $a \in \mathbb{N}$.
- Si *a* y *b* son primos distintos entonces m.c.d. $(a, b) = 1$.
- Si *a* es múltiplo de *b* entonces m.c.d. $(a, b) = b$.

Este método resulta muy laborioso si los números son grandes. Sin embargo, si tenemos en cuenta la descomposición en factores primos de cada número podemos calcularlo de la siguiente manera:

El máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más números es el producto de los factores primos comunes elevados al **menor** exponente con el que aparecen en su descomposición.

Ejemplos

- Hallamos m.c.d. (120, 126). La descomposición en factores primos es:

  $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ y $126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$

  Por ello, m.c.d. $(120, 126) = 2 \cdot 3 = 6$
- Hallamos m.c.d. (72, 180, 396), como:

  $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ y $396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$

  Entonces, m.c.d. $(72, 180, 396) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

Practica y aprende

17. Calcula el m.c.d. de los números que se indican a continuación:

a. 36 y 54 **c.** 744 y 1372 **e.** 36, 45 y 180

b. 48 y 63 **d.** 180, 216 y 252 **f.** 630, 720 y 1080

18. Un hortelano tiene 125 manzanas y 75 peras y las quiere repartir en lotes iguales, de tal forma que en los lotes no se mezclen manzanas con peras y que todos tengan las mismas piezas de fruta. ¿Cuál es el mínimo número de lotes que puede obtener?

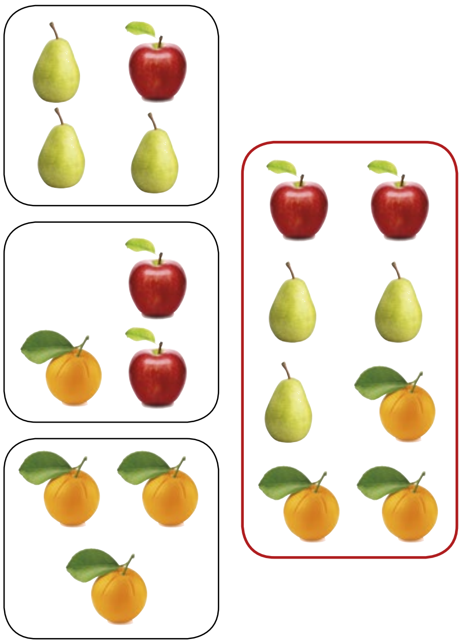
19. 5 Calcula:

a. m.c.d. $(2^5, 5^2)$ **b.** m.c.d. $(2^5 \cdot 5^2, 2^4 \cdot 5^3)$

5 Mínimo común múltiplo

Se llama mínimo común múltiplo de dos o más números al menor de los múltiplos comunes a todos ellos.

Se escribe **m.c.m. (*a*, *b*)** para denotar el mínimo común múltiplo de los números *a* y *b*.



Una manera de hallar el mínimo común múltiplo de varios números es hallar los primeros múltiplos de cada uno de ellos hasta encontrar el menor múltiplo común a todos.

Ejemplo

Calculamos el mínimo común múltiplo de 10, 12 y 30:

Mult (10) = {10, 20, 30, 40, 50, **60**, 70…}

Mult (12) = {12, 24, 36, 48, **60**, 72…} ⟶ m.c.m. (10, 12, 30) = **60**

Mult (30) = {30, **60**…}

Propiedades básicas del mínimo común múltiplo

- m.c.m. $(a, 1) = 1$ para todo $a \in \mathbb{N}$
- m.c.m. $(a, a) = a$ para todo $a \in \mathbb{N}$
- Si a y b son primos entonces, m.c.m. $(a, b) = a \cdot b$
- Si a es múltiplo de b entonces, m.c.m. $(a, b) = a$

Si tenemos en cuenta la descomposición en factores primos de cada número podemos calcularlo más rápidamente como sigue:

El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números es el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al **mayor** exponente con el que aparecen en su descomposición.

Ejemplos

- Hallamos el m.c.m. (42, 56).
  La descomposición en factores primos de ambos números es
  $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ y $56 = 2^3 \cdot 7$
  Luego m.c.m. (42, 56) $= 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168$
- Hallamos el m.c.m. (24, 84, 108).
  $24 = 2^3 \cdot 3$, $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ y $108 = 2^2 \cdot 3^3$
  Luego m.c.m. (24, 84, 108) $= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7 = 1512$

Con calculadora

Introduce en la calculadora 5^{20} e intenta ver su valor. ¿Qué ocurre?

Observa

Dados dos números naturales *a* y *b* se cumple que:

m.c.d. $(a, b) \cdot$ m.c.m. $(a, b) = a \cdot b$

Practica y aprende

20. Calcula el m.c.m. de los números que se indican a continuación:

a. 48 y 156 **b.** 42 y 56 **c.** 64 y 144 **d.** 15, 35 y 70 **e.** 37, 42 y 70 **f.** 12, 15 y 60

21. Dos relojes de péndulo tocan las 12 simultáneamente. Uno de ellos va bien, y el otro adelanta 40 s cada hora. ¿Cuándo volverán a tocar la hora (no la misma, claro) a la vez?

22. Encuentra dos números *a* y *b* que cumplan que m.c.d. $(a, b) = 3$ y $a \cdot b = 36$.

23. Encuentra todas las parejas de números *a* y *b*, cuyo máximo común divisor es 3 y su mínimo común múltiplo es 30.

Para recordar

DIVISIBILIDAD

Múltiplos	Un número natural *m* se dice que es **múltiplo** de otro número natural *a* si existe otro número natural *b* tal que $m = a \cdot b$.		18 es múltiplo de 2 y de 9 pues: $18 = 2 \cdot 9$
Divisores	Un número natural *a* es **divisor** de otro número natural *b* si la división $b : a$ es exacta.		2 y 9 son divisores de 18 pues: $18 : 9 = 2$
Criterios de divisibilidad	2	Si termina en cifra par.	34, 48, 506, 800…
	3	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3.	54, 78, 435, 711…
	4	Si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4 o cero.	72, 708, 728, 800…
	5	Si termina en 0 o 5.	15, 30, 405, 810…
	6	Si es múltiplo de 2 y de 3.	54, 78, 426, 810…
	9	Si la suma de sus cifras es múltiplo de 9.	54, 108, 423, 810…
	10	Si termina en 0.	50, 70, 420, 810…
	11	Si la diferencia entre la suma de las cifras que ocupan posición par y las de la posición impar es múltiplo de 11 o cero.	55, 594, 748, 726…
Números primos y compuestos	La criba de Eratóstenes es un algoritmo para hallar todos los números primos menores que cierto número natural prefijado de antemano.		Se marca el 2 como primo y se tachan sus múltiplos. Después se marca el primer número no tachado como primo y se tachan sus múltiplos. Así sucesivamente.
	Descomposición en producto de factores primos: todo número natural se puede expresar de modo único como producto de potencias de números primos.		$72 = 2^3 \cdot 3^2$ $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
Máximo común divisor	El máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más números es el producto de los factores primos comunes elevados al menor exponente al que aparecen en su descomposición como producto de potencias de números primos.		m.c.d. $(72, 120) = 2^3 \cdot 3 = 24$
Mínimo común múltiplo	El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números es el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados al mayor exponente al que aparecen en su descomposición como producto de potencias de números primos.		m.c.m. $(72, 120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

Para practicar

Múltiplos y divisores de un número natural

1. Halla 5 divisores y 5 múltiplos de 75.

2. Halla todos los divisores de 17, 38 y 45.

3. *Encuentra un número que no sea múltiplo de 18 cuyo cuadrado sí lo sea.

4. Halla todos los divisores de 8, 27 y 625. ¿Cuántos divisores tienen los cubos de números primos? ¿Y las potencias cuartas?

5. Indica cuáles de las siguientes frases son verdaderas y cuáles son falsas:

- **a.** Si un número es divisible entre 100, entonces es también divisible entre 4 y entre 25.
- **b.** Si un número es divisible entre 3 y entre 6, entonces es divisible entre 18.
- **c.** Si un número es divisible entre 4 y entre 25, entonces es divisible entre 100.
- **d.** Si un número es divisible entre 4 y entre 10, entonces es divisible entre 8.

6. Demuestra que el producto de un múltiplo de 3 por un múltiplo de 5 es múltiplo de 15.

7. En lugar de *a*, escribe una cifra para que los números que resulten sean divisibles entre 3:

- **a.** 3*a*54
- **b.** 49*a*3
- **c.** 98*a*75
- **d.** 49*a*
- **e.** 36*a*1
- **f.** 9*a*00

8. ¿Cuándo es un número divisible entre 6? Averigua cuáles de estos números son divisibles entre 6:

- **a.** 4314
- **b.** 3949
- **c.** 1554
- **d.** 6252

9. *Obtén un criterio de divisibilidad de un número entre 25 que involucre solo a sus dos últimas cifras.

10. *Obtén un criterio de divisibilidad de un número entre 125 que involucre solo a sus tres últimas cifras.

11. *Obtén un criterio de divisibilidad de un número entre 8 que involucre solo a sus tres últimas cifras.

12. ¿Son divisibles entre 15 los siguientes números?

- **a.** 3375
- **b.** 1080
- **c.** 840
- **d.** 720
- **e.** 645
- **f.** 960

13. Averigua si estos números son divisibles entre los números indicados:

- **a.** 32 453 entre 9
- **b.** 73 256 entre 12
- **c.** 47 289 entre 11
- **d.** 65 322 entre 18
- **e.** 75 432 entre 6
- **f.** 74 398 entre 11
- **g.** 72 485 entre 25
- **h.** 31 842 entre 9

14. Aplicando las reglas de divisibilidad, calcula el resto de las divisiones:

- **a.** 3429 : 4
- **b.** 1595 : 5
- **c.** 958 : 9
- **d.** 298 : 4
- **e.** 1959 : 3
- **f.** 435 : 4

Números primos y compuestos

15. De los siguientes números, ¿cuáles son primos?

- **a.** 387, 491, 797, 513
- **b.** 845, 817, 151, 1248

16. Descompón en factores primos los números:

- **a.** 170, 175, 252, 500
- **b.** 765, 2772, 455, 4550
- **c.** 39, 390, 3900, 39 000

17. Escribe las listas de todos los divisores de los números 144, 297, 500 y 1323.

18. *¿Cuál es el primer múltiplo del número 1200 que es un cubo?

19. *¿Es 81 un divisor de 3^{13}? Razona la respuesta.

Para practicar

20. *Rellena las casillas que hemos dejado en blanco en las factorizaciones de los siguientes números:

a. $290\,400 = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \cdot 5^{\square} \cdot 11^{\square}$

b. $13\,456\,625 = 5^{\square} \cdot 7^{\square} \cdot 13^{\square}$

21. Descompón en factores primos el número 600. ¿Son 53 y 23 divisores de 600?

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

22. Calcula:

a. m.c.d. $(3^4, 5^2)$

b. m.c.d. $(2 \cdot 3^2 \cdot 5^5, 2^3 \cdot 5 \cdot 13)$

c. m.c.d. $(13^3 \cdot 23, 5^2 \cdot 13^2)$

d. m.c.d. $(11^3 \cdot 37, 11^2 \cdot 79^2)$

23. Marta y Carlos tienen 42 y 35 años, respectivamente y dos hijos de distinta edad. Calcula las edades de estos sabiendo que dividen a las edades de los padres.

24. Si a es un divisor de 1110, ¿cuál es m.c.d. (a, 1110)?

25. Calcula:

a. m.c.d. (12, 36, 50)

b. m.c.d. (33, 45, 70)

26. Federico quiere dividir su finca, que es un rectángulo de 320 m de largo y 160 m de ancho, en parcelas cuadradas iguales, de modo que estas tengan la mayor área posible. ¿Cuál será la longitud del lado de cada parcela cuadrada?

27. Indica cuáles de los siguientes números son primos entre sí:

a. 15 y 121 **c.** 81 y 343

b. 14 y 77 **d.** 43 y 125

28. Descompón los números en factores primos y calcula el m.c.m. de los números de cada apartado:

a. 30, 600 y 2200 **d.** 12, 15, 24 y 60

b. 26, 4 y 13 **e.** 35, 15 y 70

c. 42, 37 y 70 **f.** 4, 6 y 21

29. *Calcula el menor múltiplo de 13 mayor que 418.

30. Los alumnos de una clase pueden formar grupos de 2, 3, 5 y 6 personas. ¿Cuántos alumnos serán como mínimo?

31. Podemos llenar una vasija con recipientes de 2, 3, 4 y 6 litros, vaciando siempre un número exacto de recipientes llenos. ¿Cuántos litros contendrá, como mínimo, la vasija?

32. Dos autobuses urbanos hacen recorridos distintos partiendo de la misma plaza. El primero tarda en realizar su recorrido 15 min y el segundo, 20. Si parten los dos a las 8:00 en su primer viaje, ¿a qué hora volverán a coincidir en la plaza?

33. *¿Cuál es el menor número de tres cifras que dividido entre 10, 12 y 15 da de resto 7?

34. *Escribe el menor número, distinto de 1, que al dividirlo entre 2, 3, 5 y 7 da de resto 1.

35. Calcula el m.c.m. y el m.c.d. de los siguientes pares y tríos de números:

a. 12 y 18 **d.** 240, 270 y 150

b. 72 y 84 **e.** 960, 2400 y 720

c. 96 y 120 **f.** 420, 1620 y 210

36. Tres barcos realizan sus recorridos en 6, 9 y 12 días, respectivamente. El 2 de marzo coincidieron en el puerto. ¿Cuándo volverán a coincidir?

37. Para un trabajo que se encargó a un carpintero, se necesitaban tablas de 20, 24, 30, 60 y 150 cm de largo. Con ese fin adquirieron tablas que se podían cortar en trozos iguales de cualquiera de esas medidas. ¿Qué longitud mínima debían tener esas tablas?

Para practicar

38. Los integrantes de un grupo musical ensayan periódicamente; la batería cada 3 días, el guitarrista cada 4, el cantante cada 2 y la teclado cada 6 días. ¿Cada cuántos días ensaya el grupo completo?

39. Indica cuál es la descomposición como potencias de números primos de los siguientes mínimos comunes múltiplos:

a. m.c.m. $(3^4, 5^2)$

b. m.c.m. $(2 \cdot 3^2 \cdot 5^2, 2^3 \cdot 5 \cdot 13)$

c. m.c.m. $(13^3 \cdot 23, 5^2 \cdot 13^2)$

d. m.c.m. $(11^3 \cdot 37, 11^2 \cdot 79^2)$

40. Rellena las casillas que hemos dejado en blanco:

$$\text{m.c.m.}\ (1815, 1100) = 2^{\square} \cdot 3^{\square} \cdot 5^{\square} \cdot 11^{\square}$$

41. Calcula el valor del producto $a \cdot b$ sabiendo que m.c.d. $(a, b) = 4$ y m.c.m. $(a, b) = 96$.

42. Encuentra los números naturales *a* y *b*, primos entre sí y mayores que 1, cuyo mínimo común múltiplo es 45.

43. *Encuentra todos los números, *a*, que cumplen que m.c.m. $(8, a) = 56$.

44. *Encuentra todas las parejas de números *a* y *b* cuyo máximo común divisor es 5 y su mínimo común múltiplo es 20.

45. Juega e investiga sobre los números primos. Haz un grupo de, al menos, 3 personas y juega a lo siguiente:

a. Durante 6 min, cada uno busca el número primo más grande que pueda sin utilizar ningún aparato electrónico. Al finalizar el tiempo, compara tu respuesta con la de tus compañeros. Ganará el que haya encontrado el mayor número primo.

Para comprobar si los números de tus compañeros realmente son primos, utiliza una calculadora de primos, las encontrarás en Internet.

b. Busca en Internet el número primo más grande que se conoce hasta la fecha. ¿Cuántos dígitos tiene? ¿Te imaginas la criba de Eratóstenes que tendrías que haber construido para encontrarlo?

c. ¿Por qué es seguro que existe un número primo mayor al mayor que se conoce hasta la fecha? Busca información acerca de cómo Euclides probó que el conjunto de números primos es ilimitado y pon un ejemplo en el que los números primos son muy importantes.

Situación de aprendizaje

46. ¿Reciclar es lo más importante a la hora de reducir los residuos?

a. Existe un concepto que habla de las tres acciones más importantes que todos podemos llevar a cabo para reducir residuos; se llama la «regla de las 3R». Las erres se refieren a reciclar, reducir y reutilizar. Realiza una redacción donde expliques en qué orden crees que sería más conveniente ponerlas en práctica.

b. Si en un punto recogen el papel cada 5 días y el plástico cada 3 y un día coinciden ambas recogidas, ¿cuántos días tardarán en volver a coincidir?

c ¿Qué concepto matemático has utilizado para responder a la cuestión anterior?

d. ¿En qué meses del año pueden coincidir las recogidas 3 veces en un mismo mes?

Autoevaluación A

1. En lugar de *a* escribe una cifra para que el número 81*a* sea múltiplo de 3 y de 4. ¿Lo es en tal caso también de 9?

2. Completa las siguientes frases:
   a. Los números 66 y ___ son múltiplos consecutivos de 6.
   b. Los números 66 y ___ son múltiplos consecutivos de 11.

3. Obtén las factorizaciones en factores primos de los siguientes números:
   a. 90
   b. 195
   c. 432
   d. 729
   e. 968
   f. 1728

4. *Obtén el número más pequeño que al multiplicarlo por 360 dé como resultado un cubo perfecto.

5. Calcula el mayor número natural que divide a 220 y a 540.

6. ¿Existe algún múltiplo de 111 que no sea múltiplo de 3?

7. Calcula el menor número natural múltiplo de 315 y 210.

8. Miguel ha comprado para su fiesta de cumpleaños golosinas de tres sabores: fresa, limón y naranja. De las primeras compró 1 kg, de las segundas 750 g y de las terceras 1,25 kg. Quiere preparar bolsas del mismo peso con golosinas de un único sabor. ¿Qué peso han de tener las bolsas para hacer el menor número posible de ellas? ¿Cuántos envases de cada sabor se harán?

9. [1] *¿Sería posible encontar algún número natural *n* tal que m.c.m. $(n, 3) = 10$?

10. *Al dividir un segmento en trozos de 3 cm, sobran 2 cm. También al dividirlo en trozos de 5, 7, 15 y 25 cm, siempre sobran 2 cm. ¿Cuánto medirá como mínimo el segmento?

11. En un control de carretera se examinan los neumáticos de uno de cada 8 vehículos, las luces de uno de cada 6 y los frenos de uno de cada 3. ¿Qué lugares ocupan los vehículos cuyos neumáticos, luces y frenos son examinados a la vez?

12. *¿Cuál es el menor múltiplo de 7 que dividido entre 2, 3, 4, 5 o 6 da de resto 1?

13. Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:
    a. 630 y 48
    b. 48 y 60
    c. 45 y 75
    d. 36 y 45
    e. 54 y 72
    f. 32 y 48

14. [6] Halla el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de:
    a. 630, 460 y 980
    b. 6105, 135 y 175
    c. $3^3 \cdot 5^2 \cdot 17 \cdot 23$ y $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$

15. Dos ciclistas entrenan en un circuito. La primera tarda 1,5 min en completar una vuelta y la segunda 110 s. Si salen a la vez, ¿cuánto tiempo tardan en volver a cruzar juntas la línea de meta? ¿Cuántas vueltas habrá dado cada una?

Proyecto

Encontrar la cantidad de números menores que un número dado y que son primos con él.

Para empezar, calienta motores practicando en grupo con estas actividades:

Actividad 1

Forma un grupo de entre 3 y 5 personas y juega a las cartas de la siguiente forma. Se reparten seis cartas de la baraja española a cada persona y se dejan las restantes en el centro. Cuando llega el turno de un jugador, este puede retirar dos cartas cuyos números sean primos entre sí. En caso de que esto no sea posible robará una carta del montón central. Si aquí ya no quedan cartas habrá de pasar turno. Gana aquel jugador que primero se haya quedado sin cartas. En caso de que esto no ocurra y todos los jugadores hayan pasado su turno, ganará aquel cuyas cartas sumen la menor puntuación.

El juego es más interesante si elaboráis vuestra propia baraja con 40 números naturales distintos.

Actividad 2

Realiza una tabla en la que en la primera fila y en la primera columna estén los 10 primeros números naturales, y en el resto de las casillas el máximo común divisor de los números de la primera fila y la primera columna en la que se encuentra la casilla:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
2	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
3	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
4	…	…	…	…	…	2	…	…	…	…
5	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
6	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
7	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
8	…	…	…	4	…	…	…	…	…	…
9	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
10	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

m.c.d. (4, 6) = 2

m.c.d. (8, 4) = 4

Responde

- ¿Qué ocurre con los números que están en la diagonal? ¿Por qué crees que ocurre esto?
- ¿Es necesario que hagas las cuentas para los cuadros que están sobre la diagonal y los que están debajo? ¿Encuentras alguna forma de ahorrarte el trabajo? ¿Por qué?

Actividad 3

- Empleando la tabla de la actividad 2, indica cuántos números menores que n son primos con n para $n = 2, 3, \dots$ y 10.
- Realiza la descomposición como producto de potencias de números primos de 2, 3, … y 10.

Curiosidades matemáticas

Hacer lo mismo con una fórmula

Inspirándose en la criba de Eratóstenes, Euler ideó un método para saber cuántos números menores que un número dado son primos con él y obtuvo el siguiente resultado:

Dado un número n en cuya descomposición como producto de potencias de números primos solo aparecen los números primos p_1, p_2, …, p_k. Entonces hay:

$$n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

números naturales menores que n y primos con n.

Ejemplo

En la descomposición del número 100 como producto de potencias de números primos:

$$100 = 2^2 \cdot 5^2$$

solo aparecen los primos 2 y 5, luego hay:

$$100\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=40$$

Así, hay 40 números naturales menores que 100 y primos con 100.

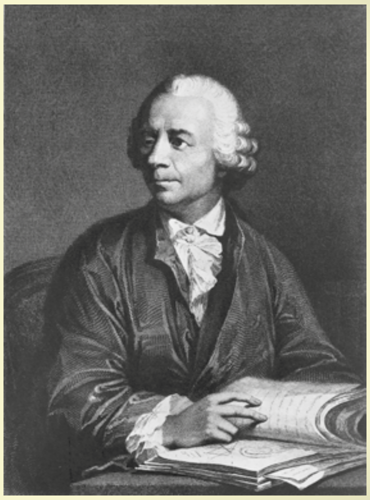
Actividad 4

Calcula cuántos números naturales menores que n y primos con n existen para:

a. $n = 40$ **c.** $n = 300$ **e.** $n = 888$ **g.** $n = 1000$ **i.** $n = 2028$

b. $n = 250$ **d.** $n = 560$ **f.** $n = 981$ **h.** $n = 1024$ **j.** $n = 1\,000\,000$

Leonhard Euler (1707 – 1783)



Nació en Basilea, Suiza, en 1707. Con solo 16 años obtuvo el título de maestro en Filosofía por la Universidad de Basilea, pero su maestro Johann Bernoulli pronto despertó su vocación científica.

Euler ha sido uno de los matemáticos más prolíficos de la historia. Realizó grandes avances en la teoría de números, fue el padre de la teoría de grafos e introdujo el concepto de función y su notación como $y = f(x)$.

Demostró que el baricentro, circuncentro y ortocentro de un triángulo están alineados. Hoy en día, llamamos recta de Euler a la que pasa por ellos.

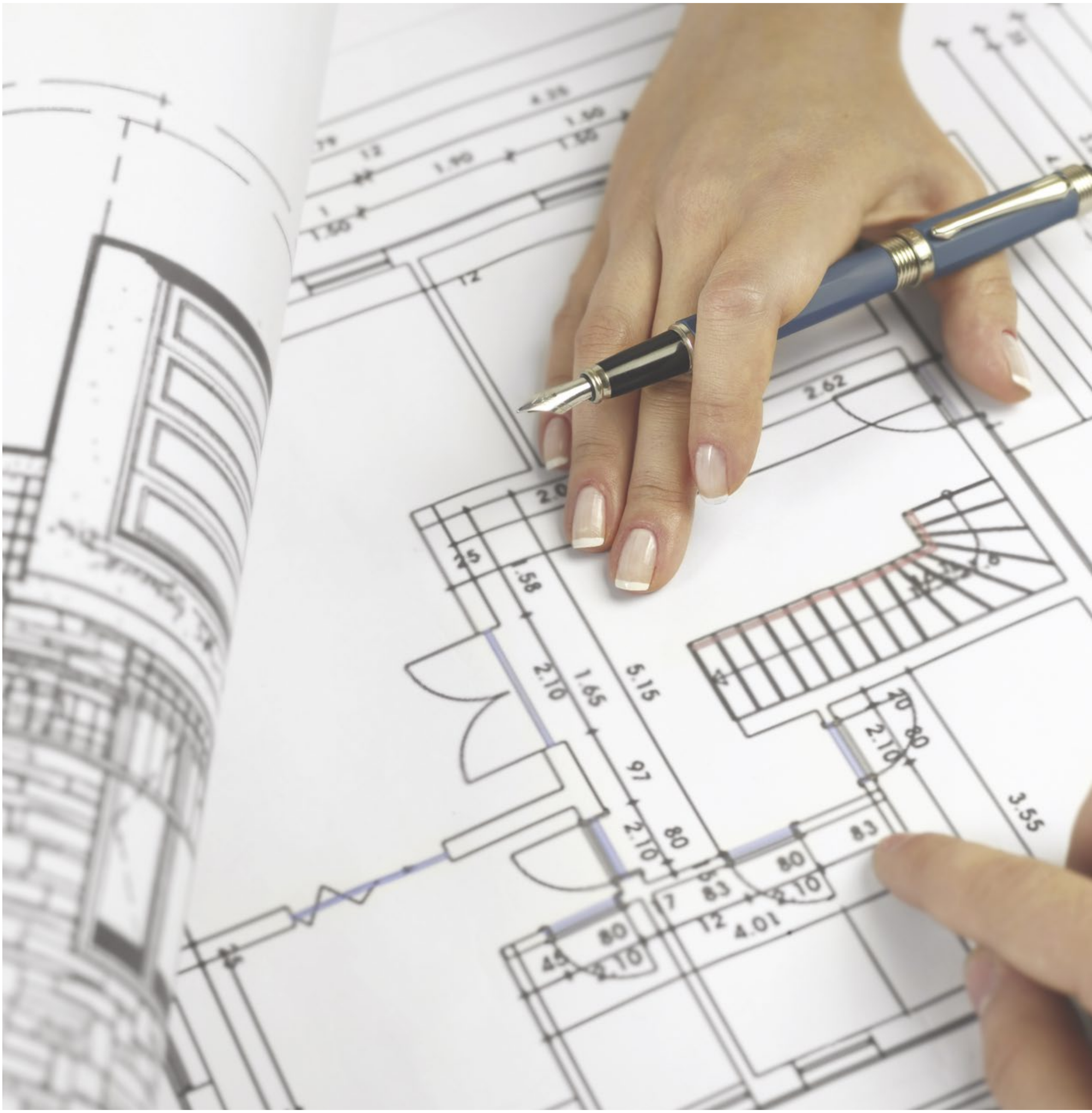
A pesar de que vivió ciego sus últimos 17 años nunca dejó de trabajar. Falleció en el año 1783 en San Petersburgo.

Pasapalabras inacabado

Empieza por…	Definición	Palabra
C	Procedimiento creado por Erastóstenes para hallar todos los primos menores a un número dado.	…
D	…	Divisor
E	Matemático griego que demostró que hay infinitos números primos.	…
P	…	Primo
S	Número de divisores de 2^{60}.	…
T	Exponente de todo cubo.	…

UNIDAD 5

Los números decimales. El sistema métrico



En esta unidad aprenderás a...

- Conocer los números decimales y su utilidad.
- Realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones con decimales.
- Conocer la relación entre las fracciones y los números decimales.
- Conocer las unidades de longitud, masa, tiempo, superficie, volumen y capacidad.
- Realizar cambios de unidades de longitud, masa, tiempo, superficie, volumen y capacidad.
- Conocer y aplicar la relación entre volumen y capacidad.
- Resolver problemas que involucren a las magnitudes anteriores.

Desde la Antigüedad el hombre ha buscado procedimientos, elementales en unos casos, más ingeniosos en otros, y ha construido instrumentos cada vez más precisos, con el fin de medir magnitudes. Estos procesos han ido acompañados en muchos casos de notables avances. Cabe citar al respecto, la utilización del teorema de Tales para medir la altura de las pirámides de Egipto.

Las Matemáticas no han sido la única ciencia que ha contribuido a resolver el problema de medir magnitudes: pensemos, por ejemplo, en cómo los anillos del tronco de un árbol miden su edad, y para el cálculo de la antigüedad de los restos arqueológicos se utiliza el carbono C_{14}.

Un problema asociado a la medición de magnitudes es el de decidir cuál es la unidad de medida. Antiguamente se empleaban unidades de medidas naturales: el pie, el paso, la pulgada... Los egipcios y los griegos usaban semillas de trigo como la menor unidad de peso. La uniformidad de peso de las semillas de trigo hacía de este grano una buena unidad de medida. Hoy en día, empleamos unidades de medida más precisas, aunque aún se siguen empleando algunas de las anteriores.

Responde

- Sara compra 1,5 kg de naranjas a 0,8 €/kg, 0,75 kg de kiwis a 2,40 €/kg y 2 lechugas a 80 cent cada una. Si paga con un billete de 10 €, ¿cuánto dinero le tienen que devolver?
- Escribe las fracciones $\frac{3}{8}$ y $\frac{7}{20}$ como número decimal.
- Julián ha comprado 3 paquetes de folios a 2,35 € cada uno y 5 carpetas. Ana compró 1 paquete de folios y 3 carpetas. Ambos pagaron con un billete de 20 €. Si a Julián le devolvieron 4,20 €, ¿cuánto le tienen que devolver a Ana? *(Concurso de Primavera 2017 Nivel 2)*.

1 Los números decimales

Fracciones decimales

Son aquellas que tienen como denominador la unidad seguida de ceros.

$\frac{1}{10} = 0,1 =$ una décima

$\frac{1}{100} = 0,01 =$ una centésima

$\frac{1}{1000} = 0,001 =$ una milésima

Se cumple que:

1 unidad = 10 décimas =
=100 centésimas = 1000 milésimas

Todo número decimal es una fracción

Cada número decimal se descompone como suma de enteros y fracciones, luego, se puede expresar como fracción. Esto significa que los números decimales son un subconjunto de los números racionales.

Propiedad fundamental

Dados dos números decimales cualesquiera siempre se pueden encontrar entre ellos tantos números decimales como se desee. Por tanto, en los números decimales no hay anterior ni siguiente.

Con frecuencia los números enteros resultan insuficientes para describir algunas situaciones reales, pues es necesario emplear cantidades menores que la unidad y es muy útil emplear los **números decimales.**

Un número decimal está formado por:
- Una **parte entera** (las unidades).
- Una **parte decimal** (menor que la unidad).

Se expresa separando ambas partes por una coma y de modo que cada cifra tiene un valor 10 veces mayor que la cifra de su derecha.

Para descomponer el número 231,568:

$$231,568 = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 1 + 5 \cdot 0,1 + 6 \cdot 0,01 + 8 \cdot 0,001$$

Las unidades de la parte decimal reciben el nombre de **décimas, centésimas, milésimas, diezmilésimas...** pues son precisamente una décima, centésima, milésima, diezmilésima... de la unidad. Así, la descomposición decimal en unidades del número anterior es:

Centenas	Decenas	Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas
2	3	1	5	6	8

Ejemplo

Descompón en unidades el número decimal 7,3295.

$$7,3295 = 7 + 3 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,01 + 9 \cdot 0,001 + 5 \cdot 0,0001$$

Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas
7	3	2	9	5

Para **ordenar números decimales** se comparan primero sus partes enteras, en caso de ser iguales se comparan sus décimas, caso de ser iguales sus centésimas, y así sucesivamente.

Ejemplo

Halla 2 números decimales entre 3,14 y 3,15.

Como ambos números están expresados hasta las centésimas, añadiendo milésimas se encuentran números que estén entre los dos. Sirven, por ejemplo: 3,141 y 3,142

pues es claro que: $3,14 = 3,140 < 3,141 < 3,142 < 3,150 = 3,15$

Practica y aprende

1. Descompón en unidades los siguientes números decimales indicando su parte entera y su parte decimal:

a. 23,45 **b.** 0,2103 **c.** 1000,002

2. Ordena de menor a mayor los siguientes números decimales y halla 2 números decimales entre el c. y el e.:

a. 2,09 **b.** 20,001 **c.** 2,1 **d.** 20,09 **e.** 2,11

2 Operaciones con números decimales

2.1. Suma y resta de números decimales

Para sumar y restar números decimales:

1. Se escriben uno debajo del otro con las comas alineadas.
2. Se suman o se restan como si fueran números naturales.
3. Se coloca la coma alineada en el resultado.

Ejemplos

- $74{,}34 + 8{,}869 = 83{,}209$

$$\begin{array}{r} 74{,}34 \\ +\ \ 8{,}869 \\ \hline 83{,}209 \end{array}$$

- $835{,}2 - 57{,}79 = 777{,}41$

$$\begin{array}{r} 835{,}2 \\ -\ \ 57{,}79 \\ \hline 777{,}41 \end{array}$$

2.2. Multiplicación de números decimales

Para multiplicar números decimales:

1. Se escriben uno debajo del otro sin alinear las comas.
2. Se multiplican como si fueran números naturales.
3. Se coloca la coma en el resultado de modo que tenga tantos decimales como tienen entre ambos factores.

Ejemplos

- $5{,}912 \cdot 28 = 165{,}536$

$$\begin{array}{rl} 5{,}912 & \rightarrow 3 \text{ decimales} \\ 28 & \rightarrow 0 \text{ decimales} \\ \hline 47296 & \\ +\ 11824 & \\ \hline 165{,}536 & \rightarrow (3+0) \text{ decimales} \end{array}$$

- $4{,}37 \cdot 1{,}8 = 7{,}866$

$$\begin{array}{rl} 4{,}37 & \rightarrow 2 \text{ decimales} \\ \cdot\ \ 1{,}8 & \rightarrow 1 \text{ decimal} \\ \hline 3496 & \\ +\ 437 & \\ \hline 7{,}866 & \rightarrow (2+1) \text{ decimales} \end{array}$$

- Para multiplicar un decimal por la unidad seguida de ceros 10, 100, 1000… se desplaza la coma hacia la derecha tantas posiciones como ceros acompañan a la unidad.
- Para multiplicar por 0,1; 0,01; 0,001… se desplaza la coma a la izquierda tantas posiciones como ceros hay delante del 1 hasta la coma.

Ejemplos

- $8{,}972 \cdot 100 = 897{,}2$
- $57{,}85 \cdot 0{,}1 = 5{,}785$
- $0{,}0041 \cdot 100\,000 = 410$
- $645 \cdot 0{,}001 = 0{,}645$

Observa que multiplicar por 0,1 es lo mismo que dividir entre 10:

$$3 \cdot 0{,}1 = 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{1} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$$

Es decir, al multiplicar un número por 0,1 se toma una décima parte del número.

Observa

Al sumar y restar decimales se pueden agregar ceros para que todos tengan el mismo número de cifras decimales.

Observa

La suma y el producto de decimales también cumplen las propiedades **conmutativa y asociativa.** Es decir, cumplen que si *x, y, z* son decimales se tiene:

	Conmutativa	Asociativa
Suma	$x + y = y + x$	$x+(y+z)= =(x+y)+z$
Producto	$x \cdot y = y \cdot x$	$x \cdot (y \cdot z)= =(x \cdot y) \cdot z$

Practica y aprende

3. Calcula:

a. $21{,}52 - 3{,}65$

b. $5{,}09 + 7 - 0{,}169$

4. Halla:

a. $52{,}9 \cdot 12$

b. $3{,}063 \cdot 2{,}54$

5. Realiza los productos:

a. $21{,}42 \cdot 10$

b. $0{,}8872 \cdot 10\,000$

6. Halla el resultado:

a. $5{,}61 \cdot 0{,}001$

b. $985{,}7 \cdot 0{,}01$

2.3. División de números decimales

Para realizar una división en la que interviene algún número decimal distinguimos 3 casos:

Para dividir un **número decimal entre un número natural** se hace la división de modo normal, pero al bajar la primera cifra decimal del dividendo se pone una coma en el cociente.

$$\begin{array}{l|l} 47{,}92 & 5 \\ \hline 2\,9 & 9, \end{array} \rightarrow \begin{array}{l|l} 47{,}92 & 5 \\ \hline 2\,9 & 9{,}5 \\ \;\;4 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l|l} 47{,}92 & 5 \\ \hline 2\,9 & 9{,}58 \\ \;\;42 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l|l} 47{,}92 & 5 \\ \hline 2\,9 & 9{,}584 \\ \;\;42 & \\ \;\;\;20 & \\ \;\;\;\;0 & \end{array}$$

Si el **divisor es un número decimal,** antes de dividir hay que multiplicar dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tiene el divisor.

$$\begin{array}{l|l} 7{,}48 & 1{,}6 \end{array} \xrightarrow{\times 10} \begin{array}{l|l} 74{,}8 & 16 \\ \hline 1\,0\,8 & 4, \end{array} \rightarrow \begin{array}{l|l} 74{,}8 & 16 \\ \hline 1\,0\,8 & 4{,}67 \\ \;1\,2\,0 & \end{array} \rightarrow \begin{array}{l|l} 74{,}8 & 16 \\ \hline 1\,0\,8 & 4{,}675 \\ \;1\,2\,0 & \\ \;\;\;8\,0 & \\ \;\;\;\;\;0 & \end{array}$$

Al igual que en el caso de la multiplicación, veamos cómo se puede dividir fácilmente por la unidad seguida de ceros:

- Para dividir un decimal por la unidad seguida de ceros 10, 100, 1000… se desplaza la coma hacia la izquierda tantas posiciones como ceros acompañan a la unidad.
- Para dividir entre 0,1; 0,01; 0,001… se desplaza la coma a la derecha tantas posiciones como ceros hay delante del 1.

Ejemplos

- 3290,1 : 100 = 32,901
- 0,032 : 10 000 = 320
- 152,805 : 0,01 = 15 280,5
- 8,34 : 0,001 = 8340

Practica y aprende

7. Halla el cociente en cada caso hasta determinar el periodo, si fuera necesario:

a. 12,3 : 5
b. 396,75 : 2,5
c. 48 : 1,6
d. 34,6 : 0,5
e. 161 : 6
f. 46,36 : 1,32
g. 49,39 : 12
h. 0,66 : 1,32

8. Realiza las siguientes divisiones por la unidad seguida de ceros:

a. 28,75 : 100
b. 2,3 : 1000
c. 75,9 : 0,01
d. 0,1 : 0,001

Decimales periódicos

Al realizar una división, el cociente puede tener infinitas cifras decimales debido a que hay un grupo de cifras decimales, llamado **periodo,** que se repite indefinidamente. Puede ser que:

1. El periodo aparezca inmediatamente después de la coma, en cuyo caso decimos que es un decimal **periódico puro.**

$$\begin{array}{l|l} 11{,}00 & 3 \\ \hline \;2\,0 & 9{,}666... \\ \;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;20 & \\ \;\;\;\;\;\;\;2... & \end{array}$$

Se escribe:

$11 : 3 = 1,666... = 1,\widehat{6}$

2. Haya cifras decimales anteriores al periodo, en cuyo caso decimos que es un decimal **periódico mixto.**

$$\begin{array}{l|l} 13{,}00 & 6 \\ \hline \;1\,0 & 2{,}1666... \\ \;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;\;4... & \end{array}$$

Se escribe:

$13 : 6 = 2,1666... = 2,1\widehat{6}$

3 Magnitudes

Una magnitud es una propiedad que se puede medir. Son ejemplos de magnitudes el tiempo, la masa, el volumen o el precio.

El resultado de medir una magnitud es la cantidad.

Medir es comparar una magnitud con otra que se toma como referencia.

Durante siglos se han venido utilizando en cada país unidades de medidas tradicionales y específicas, tales como: pulgadas, pies, palmos, libras, onzas, arrobas, etc.

A finales del siglo XVIII, con el fin de facilitar el comercio y las comunicaciones entre los países, se estableció el **Sistema Métrico Internacional de Medidas,** también conocido como **Sistema Métrico Decimal.** Este sistema ha sido la base del **Sistema Internacional de Unidades** (SI) que está vigente, prácticamente, en todo el mundo y utiliza como medidas fundamentales las siguientes:

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES		
Magnitud	**Unidad**	**Símbolo**
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Intensidad eléctrica	Amperio	A
Temperatura	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

No son magnitudes…

Hay muchas características que no se pueden medir de forma rigurosa y que, por tanto, no son magnitudes. Por ejemplo, no son magnitudes la felicidad, la belleza o la simpatía.

El **Sistema Métrico Decimal** es un sistema de unidades en el cual los múltiplos y submúltiplos de una unidad de medida están relacionados entre sí por múltiplos y submúltiplos de 10.

Observa

Las unidades de tiempo no pertenecen al Sistema Métrico Decimal, ya que están relacionadas entre sí por múltiplos y submúltiplos de 60. El tiempo es una magnitud del Sistema Sexagesimal.

Practica y aprende

9. Indica cuáles de las siguientes características son magnitudes:

- **a.** La velocidad.
- **b.** La hermosura.
- **c.** La fuerza.
- **d.** El tiempo.
- **e.** El calor.
- **f.** La capacidad.
- **g.** La agilidad.
- **h.** El volumen.
- **i.** El dolor.
- **j.** La altura.

10. ¿Qué unidades emplearías para medir las siguientes magnitudes?

- **a.** La distancia entre dos ciudades.
- **b.** El grosor de un libro.
- **c.** La masa de una persona.
- **d.** La altura de una torre.
- **e.** La velocidad de un atleta.
- **f.** La temperatura de un día de verano.

11. ¿Cómo calcularías el grosor de una hoja de tu libro de Matemáticas?

4 Unidades

Para saber más

En 1983, se definió el metro como el trayecto recorrido en el vacío por la luz durante un tiempo de:

$$\frac{1}{299\,792\,458}\ \text{s}$$

Otras unidades

En ocasiones es necesario trabajar con números muy grandes o muy pequeños, y por ello se utilizan otras unidades, como:

El micrómetro

1 µm = 0,000001 m

El nanómetro

1 nm = 0,000000001 m

La unidad astronómica

1 UA = 150 000 millones de metros

El año luz

9500 billones de metros

Otras unidades

Para medir terrenos también se emplean las siguientes unidades:

El área: 1 a = 100 m^2

La hectárea: 1 ha = 100 a

La centiárea: 1 ca = 0,01 a

Hay unidades que utilizas a menudo y que es importante que manejes con soltura; vamos a repasarlas.

4.1. Unidades de longitud

Utilizamos las unidades de longitud para medir la distancia entre dos puntos. Su unidad fundamental es el metro (m).

Relaciones entre las unidades de longitud

Para pasar de una unidad mayor a otra menor se multiplica ×

km		hm		dam		m		dm		cm		mm
	× 10 →		× 10 →		× 10 →		× 10 →		× 10 →		× 10 →	
	← : 10		← : 10		← : 10		← : 10		← : 10		← : 10	

Para pasar de una unidad menor a otra mayor se divide :

4.2. Unidades de superficie

Se llama superficie a la magnitud definida como la parte del plano que ocupa un cuerpo. La medida de esta superficie se llama área y su unidad fundamental es el metro cuadrado (m^2).

Cada unidad de superficie es 100 veces mayor que la inmediata inferior y 100 veces menor que la inmediata superior.

Relaciones entre las unidades de superficie

Para pasar de una unidad mayor a otra menor se multiplica ×

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2
	× 100 →		× 100 →		× 100 →		× 100 →		× 100 →		× 100 →	
	← : 100		← : 100		← : 100		← : 100		← : 100		← : 100	

Para pasar de una unidad menor a otra mayor se divide :

Practica y aprende

12. Escribe en tu cuaderno las medidas en las unidades que se indican:

- **a.** 7 km = ___ m
- **b.** 5,64 km = ___ m
- **c.** 2 m = ___ dm
- **d.** 234 mm = ___ cm
- **e.** 24 cm = ___ m
- **f.** 4,7 dam = ___ dm
- **g.** 25 km = ___ m
- **h.** 30 cm = ___ km

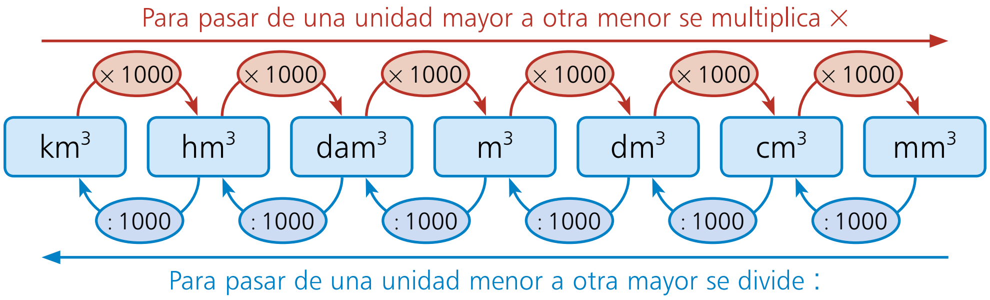
13. Transforma en hectómetros cuadrados:

- **a.** 30 m^2
- **b.** 4,6 km^2
- **c.** 32 dam^2
- **d.** 2,75 km^2
- **e.** 6,4 m^2
- **f.** 3,22 a

4.3. Unidades de volumen

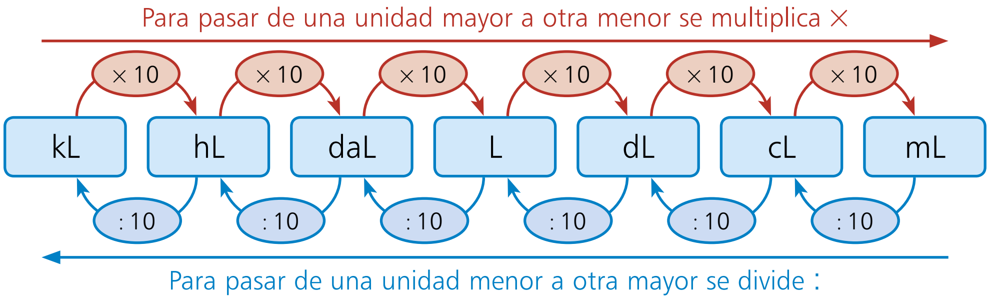
El volumen es el espacio que ocupa un cuerpo. Su unidad fundamental es el metro cúbico (m^3). Cada unidad de volumen es 1000 veces mayor que la inmediata inferior y 1000 veces menor que la inmediata superior.

Relaciones entre las unidades de volumen



Otra unidad de volumen que se utiliza mucho es el litro, que es equivalente a 1 dm^3.

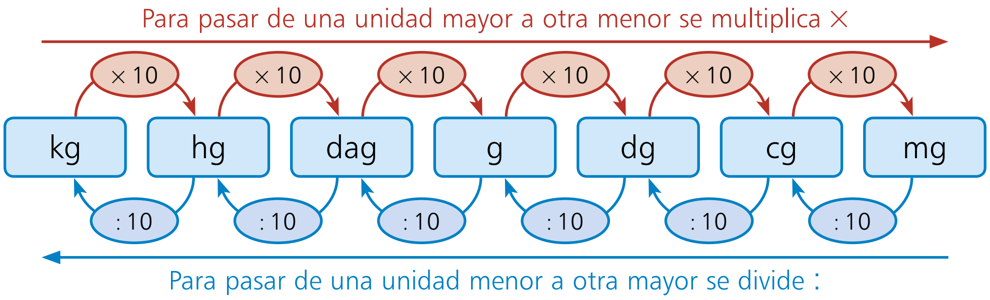
Relaciones entre las unidades de capacidad



4.4. Unidades de masa

La masa es una magnitud que expresa la cantidad de materia de un cuerpo. No debe confundirse con el peso, que es una fuerza.

Relaciones entre las unidades de masa



La capacidad

La capacidad es la propiedad de algunos objetos de contener sustancias dentro; podríamos decir que mide el volumen que cabe en un objeto. La unidad de capacidad más habitual es el litro. Como símbolo, son correctas «l» o «L», pero se prefiere la L por la confusión de la primera con el 1 o la i mayúscula.

Equivalencia entre algunas unidades

- 1 L es la capacidad que tiene un recipiente cúbico cuya arista mide 1 dm.

1 L = 1 dm³

- 1 kg es la masa que tiene el agua pura (agua destilada) que cabe en un recipiente de 1 dm^3 de volumen.

Masa de 1 L de agua destilada = 1 kg

Otras unidades

Para cantidades mayores de masa también se emplean las siguientes unidades:

El miriagramo

1 mag = 10 kg

El quintal métrico

1 q = 100 kg

La tonelada métrica

1 Tm = 1000 kg

Practica y aprende

14. Expresa en tu cuaderno la unidad indicada en cada caso:

a. 120 cm^3 = ___ m^3 **c.** 236 dm^3 = ___ L **e.** 340 mm^3 = ___ km^3 **g.** 679 m^3 = ___ cL
b. 12 dL = ___ L **d.** 270 L = ___ kL **f.** 370 cL = ___ dL **h.** 25 dL = ___ cL

15. Pasa a kilogramos las siguientes cantidades:

a. 2367 g **c.** 5,89 dag **e.** 7,23 Tm
b. 678,2 dag **d.** 87,02 hg **f.** 4,16 q

Unidad	Equivalencia
1 h	60 min = 3600 s
1 día	24 h
1 semana	7 días
1 mes	30 días
1 año	365 días = 54 semanas
1 lustro	5 años
1 década	10 años
1 siglo	100 años
1 milenio	1000 años

Ten en cuenta que

En el caso del mes, cuando se resuelven problemas se consideran meses de 30 días, aunque sabemos que los hay de 28 y 31 días.

4.5. Unidades de tiempo

Las unidades de tiempo no pertenecen al Sistema Métrico Decimal, pues están relacionadas entre sí por múltiplos y submúltiplos de 60, y no de 10. Es decir, pertenecen al Sistema Sexagesimal.

- Para pasar de minutos a horas hay que dividir entre 60.
- Para pasar de segundos a minutos hay que dividir entre 60.
- Para pasar de segundos a horas hay que dividir entre 3600.

4.6. Forma compleja e incompleja

Una misma medida puede ser expresada con una sola unidad o como suma de varias unidades.

Cuando una medida se expresa usando varias unidades decimos que está descrita en **forma compleja,** y si solo se utiliza una unidad, en forma incompleja.

Ejemplo

Escribe de forma compleja e incompleja 175 cm.

Expresión incompleja: la cantidad viene expresada con una sola unidad: 175 cm

Expresión compleja: la cantidad viene expresada en distintas unidades de la misma especie: 1 m 7 dm 5 cm

Pasar de la forma compleja a la incompleja:

Expresamos todas las cantidades en la menor unidad que aparece, posteriormente sumamos:

$$1 \text{ m } 7 \text{ dm } 5 \text{ cm } = 100 \text{ cm} + 70 \text{ cm} + 5 \text{ cm} = 175 \text{ cm}$$

Pasar de la forma incompleja a compleja:

Colocamos la cantidad dada en forma incompleja en el cuadro de unidades:

m	dm	cm
1	7	5

Practica y aprende

16. Transforma estas medidas en las unidades que se indican:

a. 840 min = ___ h **c.** 8580 s = ___ min **e.** 60 s = ___ min **g.** 1140 min = ___ h

b. 540 s = ___ min **d.** 3360 s = ___ min **f.** 660 s = ___ min **h.** 1290 min = ___ h

17. Calcula el resultado de las siguientes operaciones:

a. 34 h 8 min – 14 h 24 min **c.** 10 min 45 s – 3 min 53 s

b. 3 h 8 min – 2 h 59 min **d.** 9 h 16 min – 3 h 9 min 56 s

18. Expresa en forma compleja:

a. 234 567 cm **b.** 12 345 mm **c.** 67 891 dm **d.** 45,734 m **e.** 323 323 m **f.** 329,48 mm

19. Resta los siguientes números expresados de forma compleja:

9 hl 3 dal 2 l – 5 hl 4 dal 7 l

20. Expresa en metros cuadrados:

a. 24 km^2 6 hm^2 93 m^2 **c.** 24 km^2 5 hm^2 7 dam^2

b. 23 km^2 11 hm^2 90 dam^2 **d.** 30 hm^2 10 dam^2 5 m^2

Para recordar

LOS NÚMEROS DECIMALES. EL SISTEMA MÉTRICO

Número decimal	Formado por dos partes separadas por una coma.	25,439 tiene: 25 unidades, 4 décimas, 3 centésimas y 9 milésimas
	La parte decimal es menor que la unidad y está compuesta por las décimas, centésimas…	
Orden	Es mayor el número que tiene mayor parte entera.	$7{,}62 > 6{,}64 > 6{,}639 > 6{,}62$
	Si la parte entera es igual, nos fijamos en la primera cifra decimal distinta.	
Suma y resta	Se colocan los números en columna haciendo coincidir las comas y después se suman o restan.	$\begin{array}{r} 39{,}24 \\ +\ 7{,}661 \\ \hline 46{,}901 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 39{,}240 \\ -\ 7{,}661 \\ \hline 31{,}579 \end{array}$
	Tiene las mismas propiedades que la adición de números enteros.	
Multiplicación	Se multiplican como si fuesen números enteros y se coloca la coma en el resultado de modo que tenga tantas cifras decimales como tienen entre ambos factores.	$725 \cdot 5{,}75 = 4168{,}75$ $45{,}365 \cdot 100 = 4536{,}5$
	Tiene las mismas propiedades que la multiplicación de números enteros.	
División	Número decimal entre número natural: se divide de modo normal y al bajar la primera cifra decimal del dividendo se pone una coma en el cociente.	$124{,}8 : 3 = 41{,}6$ $125 : 2{,}5 = 1250 : 25 = 50$ $765{,}3 : 1000 = 0{,}7653$
	Si el divisor es un número decimal, multiplicamos dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tiene el divisor.	
Magnitud	Toda propiedad que se puede medir.	Edad, peso, estatura…
Longitud	La longitud de un segmento *AB* es la distancia entre *A* y *B*.	Unidad fundamental: m
Superficie	Parte del plano que ocupa un cuerpo.	Unidad fundamental: m^2
Volumen	Espacio que ocupa un cuerpo.	Unidad fundamental: m^3
Masa	Cantidad de materia de un cuerpo.	Unidad fundamental: kg
Capacidad	$1\ dm^3 = 1$ L; $1\ m^3 = 1$ kL	

Los números decimales

1. Descompón los siguientes números decimales:
   - a. 0,25
   - b. 23,635
   - c. 4,7125
2. Escribe un número comprendido entre 13,45 y 13,46.
3. Escribe los números comprendidos entre 24,76 y 24,80 de manera que cada uno sea una centésima mayor que el anterior.
4. Ordena de mayor a menor los siguientes números decimales:
   - a. 11,09
   - b. 11,013
   - c. 11,1
   - d. 11,099
5. Escribe dos números comprendidos entre 33,04 y 33,05.

Operaciones con números decimales

6. Efectúa la adición de los siguientes números decimales:
   - a. 23,56 + 436,873
   - b. 57,108 + 652,009
   - c. 43,78 + 7,897 + 654,117
   - d. 547,08 + 0,879
   - e. 83,907 + 0,0009
   - f. 76,92 + 9,783 + 8,7
7. Realiza las siguientes diferencias de números decimales:
   - a. 1245,78 – 67,7654
   - b. 876,01 – 59,0083
   - c. 8,725 – 0,025
   - d. 64,92 – 49,1234
   - e. 78,732 – 13,469
   - f. 234,56 – 98,765
8. Realiza las siguientes multiplicaciones de números decimales:
   - a. 17,75 · 8,3
   - b. 45,67 · 0,14
   - c. 7,432 · 3,002
   - d. 734,8 · 0,065
   - e. 17,65 · 0,00016
   - f. 64,35 · 0,106
9. Realiza las siguientes divisiones (hasta las milésimas):
   - a. 42,56 : 26
   - b. 38,5 : 112
   - c. 5,467 : 29
   - d. 65,7 : 45
   - e. 0,0345 : 45
   - f. 65,7 : 24
10. Calcula las siguientes divisiones (hasta las centésimas):
    - a. 48,31 : 4,3
    - b. 0,765 : 0,000016
    - c. 65,75 : 5,24
    - d. 58,1 : 2,3
    - e. 7,06 : 3,25
    - f. 42,19 : 0,64
11. Efectúa:
    - a. 10 · 1000
    - b. 3,25 · 10
    - c. 0,0125 · 100
    - d. 0,3 : 100
    - e. 325,75 : 100
    - f. 0,025 : 10
12. Realiza las siguientes operaciones:
    - a. 0,75 · (0,3 + 12,23) – 4,6 – 0,108 : 0,45
    - b. 3,22 – 0,2 · (4 – 0,5 + 0,35) : 0,8
    - c. 25,004 – (13,321 – 11,683) · 10
13. Realiza las siguientes operaciones:
    - a. (83,27 + 6,23) · 2,05 – (4,05 – 0,75)
    - b. 7,8 – (2,3 + 0,4) : 0,75
    - c. 57,36 – (7,5 – 4,25) – 3,78 : 2,25
14. Halla lo que vale una pieza de tela de 7,5 m, si el metro de tela cuesta 16,258 €.

15. Un comerciante ha comprado género por valor de 76 358,50 € y lo ha vendido por 102 567,75 €. ¿Cuánto ganó?
16. ¿Por qué número se ha de multiplicar 0,0324 para obtener 3,24?
17. Una caja llena de almendras pesa 250,75 kg, y vacía, 36,125 kg. ¿Cuál es el peso de las almendras?
18. Una fuente ha proporcionado 120,6 hl de agua durante 20 días. ¿Qué cantidad media de agua ha dado al día?
19. ¿Cuántas botellas de 1,5 l puedes llenar con un bidón de 222 l?
20. Juan desea alicatar una pared de su cuarto de baño de 20,25 m^2. Si los azulejos son de 0,5 m^2 cada uno, ¿cuántos necesitará?

Para practicar

Magnitudes

21. Indica cuáles de las siguientes características son magnitudes:

- **a.** Temperatura.
- **b.** Belleza.
- **c.** Longitud.
- **d.** Peso.
- **e.** Color.
- **f.** Intensidad de sonido.

22. Completa la tabla:

Magnitud	Unidad	Símbolo
Longitud	…	…
…	Kilogramo	…
Tiempo	…	…

23. ¿Qué unidad emplearías para medir?

- **a.** Superficie.
- **b.** Volumen.
- **c.** Capacidad.
- **d.** Altura.

24. Transforma en metros:

- **a.** 32 km
- **b.** 7 dam
- **c.** 48 hm
- **d.** 7,5 dm
- **e.** 9,2 mm
- **f.** 65 cm

25. Transforma en centilitros:

- **a.** 53 L
- **b.** 12 kL
- **c.** 9 hL
- **d.** 3 mL
- **e.** 6,2 dL
- **f.** 6 daL

26. Transforma en kilogramos:

- **a.** 54 hg
- **b.** 14,6 dag
- **c.** 65 g
- **d.** 3,26 dg
- **e.** 689 cg
- **f.** 10 mg

27. Transforma en metros cuadrados:

- **a.** 45 km^2
- **b.** 7,9 mm^2
- **c.** 34,5 hm^2
- **d.** 247 cm^2
- **e.** 42 dam^2
- **f.** 61 dm^2

28. Transforma en centímetros cúbicos:

- **a.** 167 mm^3
- **b.** 7348 dm^3
- **c.** 56 m^3
- **d.** 7,82 km^3
- **e.** 11 dam^3
- **f.** 9 hm^3

29. Opera y expresa el resultado en metros:

- **a.** 4,5 km + 45 dam
- **b.** 6,8 hm + 85 m
- **c.** 5,6 km – 7,9 hm
- **d.** 7,2 dam – 38 m

Problemas con magnitudes

30. De un depósito que contenía 12 dal de agua se han extraído 25 l. ¿Cuántos litros se han vuelto a echar en el depósito si ahora tiene 145 l?

31. *De un depósito de 20 m^3 y 702 mm^3 se han extraído 122 463 811 mm^3 de su contenido. ¿Cuántos centímetros cúbicos quedan aún en el depósito?

32. ¿Cuántas baldosas cuadradas de 30 cm de lado se necesitan para embaldosar un suelo de 0,72 dam^2?

33. Un comerciante compró 5 toneles de vino. El primero contenía 2,4 hl, el segundo 23,4 dal, el tercero 228 l, el cuarto 219 l y el quinto 2,45 hl. ¿Cuántos litros de vino compró en total?

Forma compleja e incompleja

34. Expresa en forma compleja las expresiones:

- **a.** 234,749216 dam
- **b.** 74,972385 hg
- **c.** 396,682139 dam^3
- **d.** 152 798,264185 m^2
- **e.** 27,985634 hl

35. Expresa en forma incompleja las expresiones:

- **a.** 3 hm 56 m 23 cm en metros.
- **b.** 12 kg 4 g 33 mg en miligramos.
- **c.** 6 dal 34 l en centilitros.
- **d.** 4 dam^2 7 m^2 68 cm^2 en metros cuadrados.

Unidades de tiempo

36. Transforma las unidades:

- **a.** 768 min = __ h
- **b.** 1542 s =__ min

c. 89 min = __ s
d. 46 080 s = __ h
e. 7 h = __ s
f. 2 h = __ min

37. Realiza la división 20 : 3 con la calculadora y responde:

a. ¿Cuántas cifras decimales caben en tu calculadora?
b. ¿Cuál es la última cifra decimal del resultado que aparece en la calculadora? ¿Por qué?

38. *Expresa en horas:

a. 1410 min 8280 s
b. 4 h 2382 min 2016 s

39. Un deportista emplea en su entrenamiento diario 2 h 15 min 8 s. ¿Cuánto tiempo emplea en 6 días?

40. ¿Qué tiempo pasa desde las 9 h 25 min del lunes hasta las 17 h 43 min del sábado?

41. Si un examen comienza a las 17 h, y en ese momento el reloj marca 8 h 27 min y 40 s, ¿cuánto tiempo queda para que comience el examen?

42. Busca información acerca de los husos horarios y responde a las siguientes preguntas:

a. ¿Qué son los husos horarios? ¿Para qué sirven?
b. Si en Madrid son las 15:00 de la tarde, ¿qué hora es en ese momento en Londres? ¿Y en Berlín?

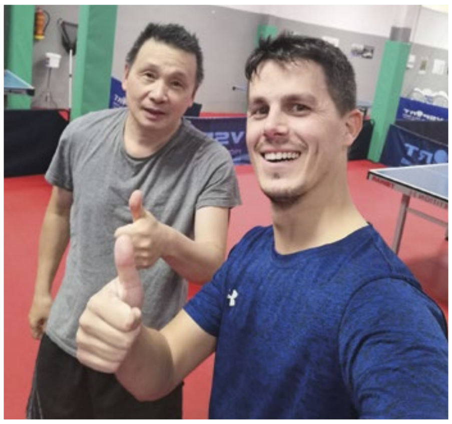
43. [1] *Carlos está en Atenas de viaje de negocios y coge un vuelo de regreso a Madrid que dura 3 h 15 min y que sale de Atenas a las 8 de la mañana de allí. Ese mismo día, Inés, su pareja, está en Lisboa y coge un vuelo a Madrid que dura 1 h 15 min y que sale de Lisboa a las 9 de la mañana de allí. Si han quedado en verse en el aeropuerto, responde:

a. ¿Quién tendrá que esperar de los dos? ¿Cuánto tiempo?
b. ¿A qué hora española se producirá el reencuentro entre ambos?

Situación de aprendizaje

44. Un juego que también es un deporte, el tenis de mesa.

a. El tenis de mesa se juega sobre una mesa de 274 cm de largo por 152,5 cm de ancho. ¿Cuál es la superficie de la mesa?
b. ¿Cuál es su perímetro?
c. La red tiene una altura de 15,25 cm y esa misma longitud sobresale por los lados de la mesa. ¿Cuáles son, por tanto, la longitud y la altura de la red utilizada?
d. En parejas, realizad el esquema de una mesa de tenis de mesa y colocad todas las medidas reglamentarias, las que se han ido dando en esta actividad y algunas más que sean necesarias.
e. En España, contamos con un jugador impresionante, He Zhi Wen «Juanito». Realiza una investigación sobre su vida y expón en clase un decálogo de sus principales logros, incidiendo en el ejemplo que es para jugadores más jóvenes.



Autoevaluación A

1. Descompón los siguientes números indicando las decenas, unidades, décimas, centésimas… que los forman:

a. 23,54

b. 1,682

c. 24,2

d. 63,9

2. Ordena de menor a mayor los siguientes números decimales:

a. 2,73

b. 2,735

c. 2,69

d. 2,7

3. Efectúa las siguientes operaciones:

a. 28,15 + 34,2

b. 9,25 + 13,45 + 6,8

c. 24,75 – 13,72

d. 8,24 – 2,3

4. Realiza las siguientes operaciones:

a. 84,3 · 2,8

b. 13,56 · 0,3

c. 285,6 : 14

d. 64,23 : 2,5

5. Efectúa:

a. 83,62 · 10

b. 1,643 · 100

c. 83,34 : 10

d. 2,4 : 100

6. Completa las casillas que hemos dejado en blanco:

a. $0,32 + \boxed{} = 4,83$

b. $12,97 - \boxed{} = 7,62$

c. $1,58 \cdot \boxed{} = 0,1896$

d. $15,26 : \boxed{} = 12,208$

7. Realiza las siguientes operaciones combinadas teniendo en cuenta la jerarquía de las operaciones:

a. 6,3 · (5,3 + 2,74)

b. (15,84 – 3,22) : (2,8 + 1,2)

8. Ana sacó el dinero que tenía ahorrado para comprar 3 libros por 24,95 € cada libro y dos cuadernos de 1,75 € cada uno. Si tenía ahorrados 100 €, ¿cuánto dinero le queda?

9. Un viaje por el Pirineo aragonés para 4 personas cuesta 842,80 €. ¿Cuánto le tocará pagar a cada persona?

10. Realiza los siguientes cambios de unidades:

a. 8,2 dam = __ mm

b. 11,2 l = __ kl

c. 230 cg = __ g

d. 2,742 m^2 = __ cm^2

e. 684,5 dm^3 = __ m^3

11. María ha ido al mercado y ha comprado una caja con naranjas que pesa 5,4 kg. Si el peso de la caja vacía es de 900 g, ¿cuántos gramos de naranjas contenía? ¿Y cuántos kilogramos?

12. Expresa en forma incompleja:

a. 8 kg 23 dag 8 dg en gramos.

b. 28 l 15 cl en kilolitros.

c. 15 hm^2 8 m^2 en centímetros cuadrados.

d. 2 km^3 4 hm^3 5 m^3 en metros cúbicos.

13. ¿Cuántas baldosas de 5 dm^2 de superficie se necesitan para embaldosar una acera rectangular de 1 km de largo y 5 m de ancho?

14. ¿Es posible guardar el vino de 25 000 botellas de 75 cl de capacidad en 20 toneles de 1 m^3 de capacidad cada uno?

15. Transforma las unidades siguientes:

a. 28 min = __ s

b. 2496 min = __ h

c. 23112 s = __ h

d. 5 h = __ s

16. Pablo ha tardado 1 h 15 min 8 s en realizar un recorrido y Pedro ha tardado 86 min en realizar el mismo recorrido. ¿Quién tardó menos?

Curiosidades matemáticas

Proyecto

Practicar las operaciones con números decimales descubriendo qué dice el mensaje secreto.

Actividad 1

Intenta descifrar el mensaje secreto. Para eso realiza estas 16 operaciones.

Recuerda la jerarquía de las operaciones. Debes realizarlas en el siguiente orden:

1.º Los paréntesis.

2.º Los productos y divisiones de izquierda a derecha.

3.º Las sumas y restas.

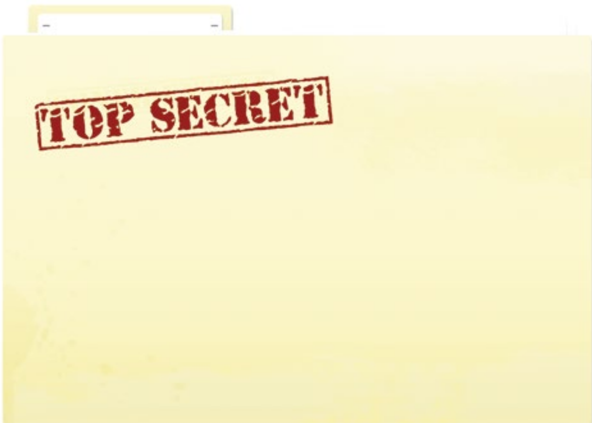
Cada resultado corresponde a una letra de la tabla del código secreto. El número que lleva delante cada operación te indica el lugar que ocupa la letra en el mensaje. Por ejemplo, como el resultado de la primera operación es 152 y el número aparece en la tabla bajo la L, esto nos dice que la primera letra del mensaje es la L.

1. $38 : 0{,}25 = 152$
2. $4{,}25 \cdot 5{,}3 =$
3. $4{,}56 + 3 \cdot (7{,}92 + 5{,}65) =$
4. $2{,}1 \cdot (1{,}2 \cdot 3 + 1{,}8 : 3) + 1{,}7 =$
5. $3{,}2 : 10 - 0{,}1082 =$
6. $12{,}5 \cdot 15{,}71 =$
7. $2002 : 0{,}44 =$
8. $549{,}39 - 175{,}44 =$
9. $21{,}39 : 100 =$
10. $2{,}5 \cdot (7{,}12 - 4{,}36) =$
11. $2{,}4 \cdot 3{,}13 - 5{,}2 : 2 =$
12. $(19{,}25 - 13{,}6) : 0{,}5 =$
13. $3{,}8 - 2{,}1 \cdot (1{,}7 - 0{,}2 : 2) =$
14. $5{,}42 + 3{,}2 \cdot (4{,}2 - 0{,}07) =$
15. $21{,}39 : 0{,}01 =$
16. $1{,}2 : 0{,}01 + 78 \cdot 0{,}01 =$

A	A	C	E	E	G	H	H
10,52	2139	373,95	4550	11,3	4,912	45,27	196,375

H	I	L	L	N	O	O	S
0,2139	18,636	120,78	152	0,44	22,525	6,9	0,2118

¿Cuál es el mensaje?



Actividad 2

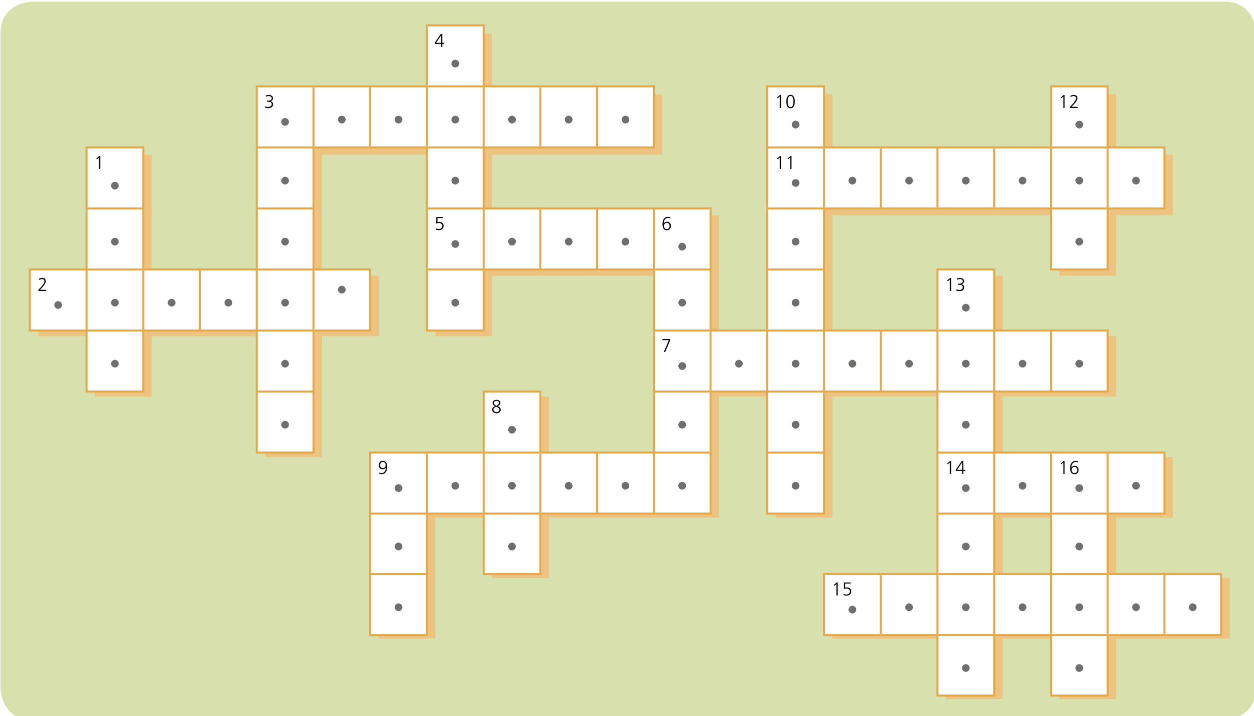
Resuelve el siguiente crucigrama en el que aparecen algunos de los conceptos que has estudiado a lo largo de la unidad.

HORIZONTALES

2. Unidad de la temperatura en el Sistema Internacional.
3. Cuando a un número le restamos su parte entera obtenemos su parte __.
5. Al revés, comparar una magnitud con otra que se toma de referencia.
7. Mil kilos.
9. Sesenta segundos.
11. Parte que ocupa un volumen.
14. Prefijo que indica un factor de 10 unidades.
15. Magnitud que en muchas ocasiones se obtiene multiplicando la longitud por el ancho y por el alto.

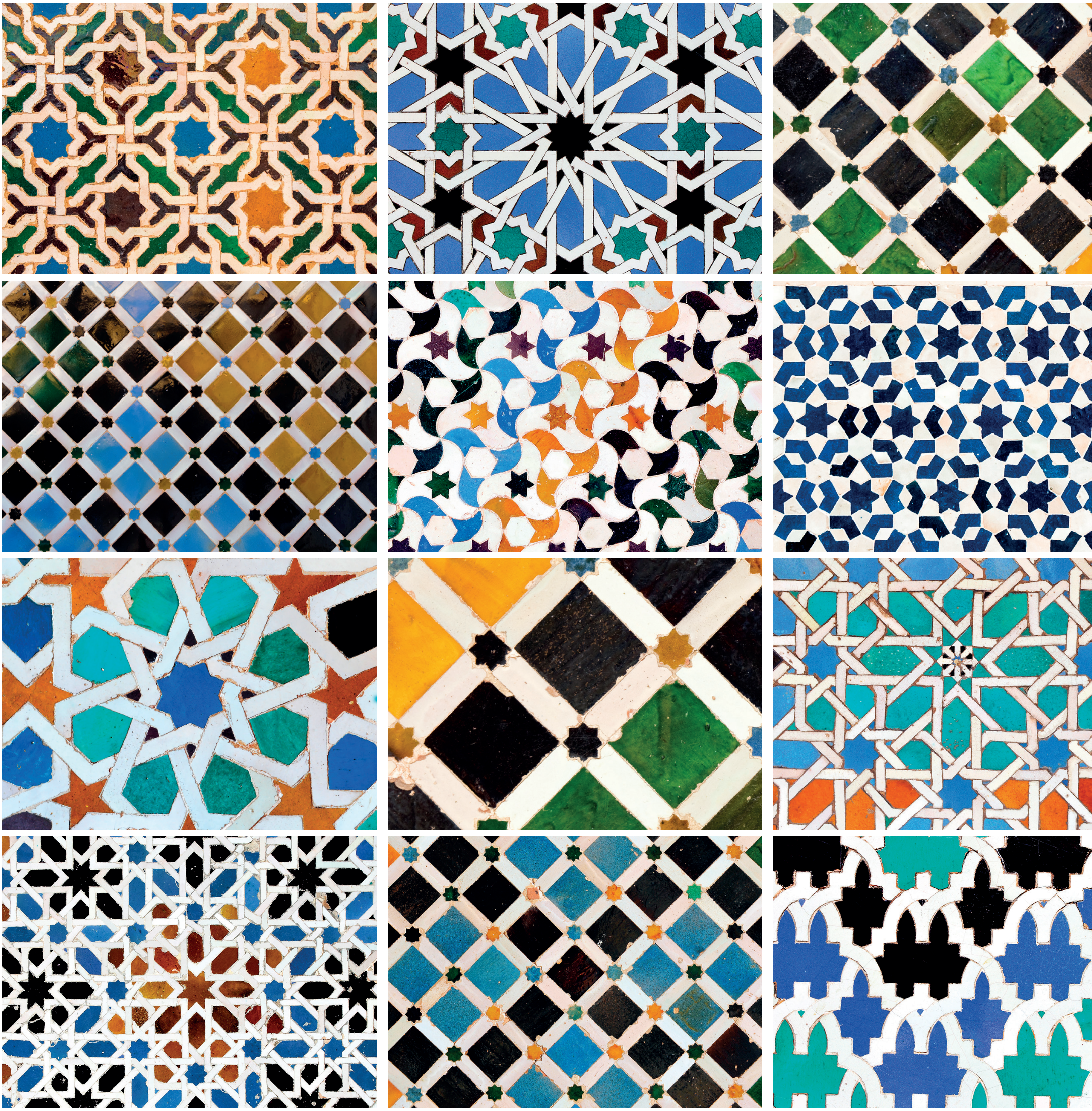
VERTICALES

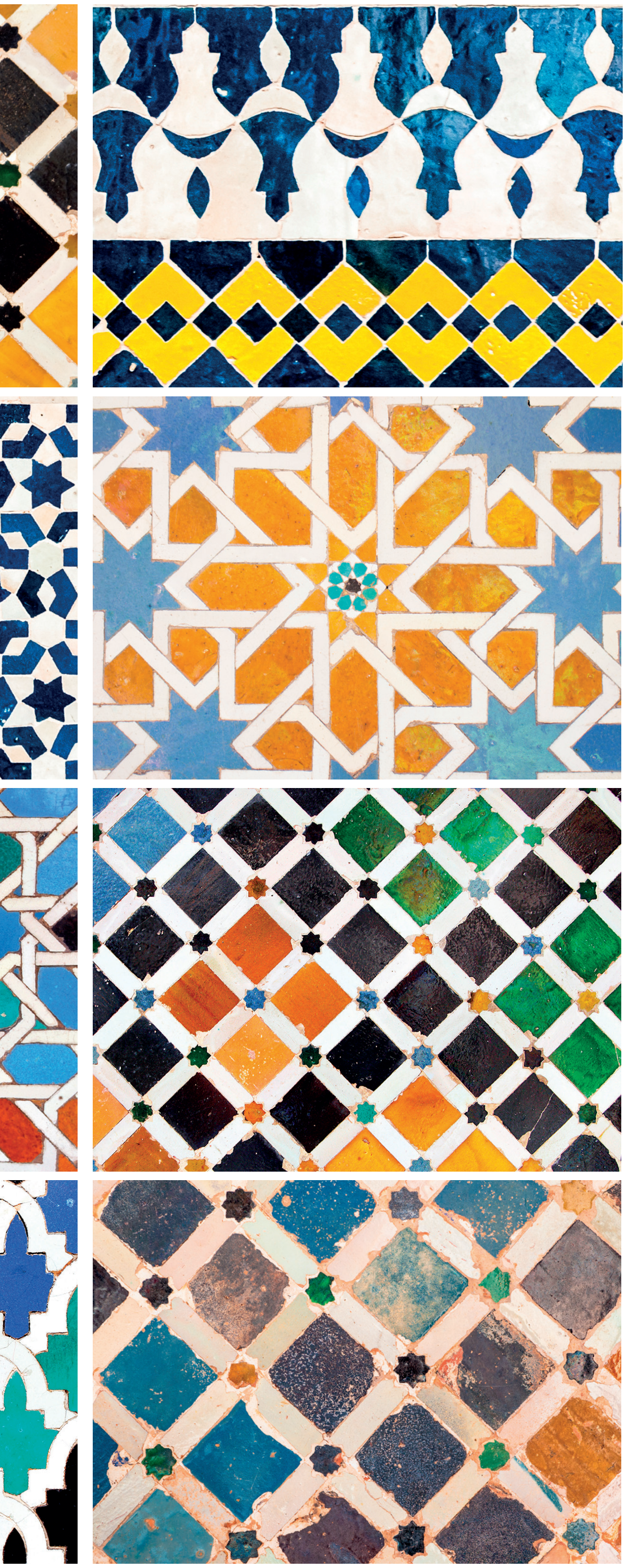
1. Cien metros cuadrados.
3. Cien milésimas equivalen a una __.
4. Unidad de la capacidad en el Sistema Internacional.
6. Unidad de la longitud en el Sistema Internacional.
8. Diez décimas.
9. Unidad de la cantidad de sustancia en el Sistema Internacional.
10. Unidad del tiempo en el Sistema Internacional.
12. Unidad natural de longitud.
13. Unidad de la intensidad luminosa.
16. La parte entera de un número está separada de la parte decimal por una __.



UNIDAD 9

Figuras planas elementales





En esta unidad aprenderás a...

- Definir y reconocer polígonos y sus principales elementos.
- Clasificar los distintos tipos de polígonos atendiendo al número de lados, ángulos, etc.
- Construir con regla, compás y transportador de ángulos un triángulo, conocidos algunos de los lados y ángulos del mismo.
- Principales características de la circunferencia y el círculo.

A grandes rasgos, podemos definir un mosaico como un recubrimiento del plano enlazando figuras, de manera que no se solapen ni quede ningún hueco entre ellas. Cada una de estas figuras son denominadas teselas.

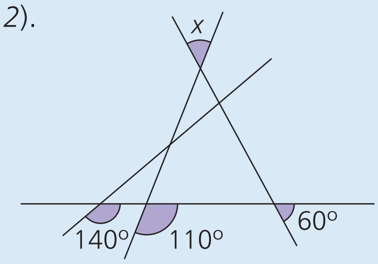
Existen numerosas maneras de crear un mosaico, las más sencillas están formadas por la unión de polígonos regulares. A partir de ellos, gracias a transformaciones: giros, simetrías y traslaciones podemos teselar un plano con las más ingeniosas figuras. No hay más que ver la obra del artista holandés Maurits Cornelis Escher, que dibujó sorprendentes figuras que encajaban entre sí formando bellos mosaicos.

A lo largo de la historia nos encontramos con multitud de culturas que emplearon la geometría para crear mosaicos con distintos fines: intelectual en Grecia, decorativo en Roma, religioso en el mundo islámico... consiguiendo con ello verdaderas maravillas.

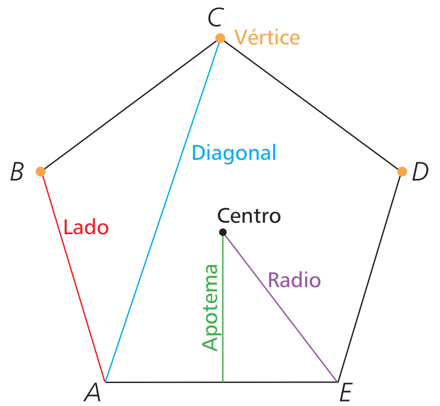
Responde

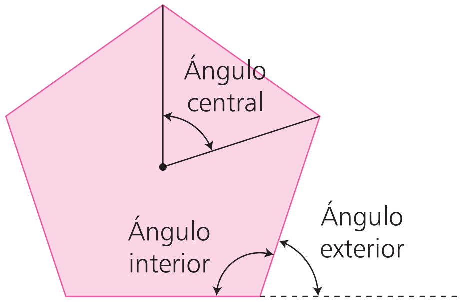
- ¿Qué figura geométrica está formada por todos los puntos que distan 3 cm de uno dado?
- ¿Qué nombre recibe el cuadrilátero que es un polígono regular?
- Escribe todas las características que conozcas de los siguientes polígonos:

- ¿Cuánto mide el ángulo x de la figura? (*Concurso de Primavera XVIII, 2014, Nivel 2*).



Elementos de un polígono





Observa

Otros polígonos atendiendo a su número de lados son:

Heptágono: siete lados.

Octógono: ocho lados.

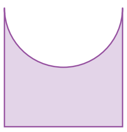
Eneágono: nueve lados.

Decágono: diez lados.

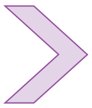
Undecágono: once lados.

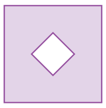
Dodecágono: doce lados.

En general, podemos hablar de **polígonos de *n* lados.**

a. 

c. 

b. 

d. 

1 Polígonos

Denominamos polígono a la porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada. Sus elementos principales son:

- **Lados:** cada uno de los segmentos que lo limitan: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$…
- **Vértices:** puntos de intersección de dos lados contiguos: A, B, C…
- **Ángulos:** ángulo determinado por dos lados consecutivos: $\widehat{ABC}$…
- **Diagonales:** segmentos que unen dos vértices no consecutivos: $\overline{AC}$ …

Un caso particular de polígonos son los polígonos regulares.

Los **polígonos regulares** son los que tienen sus ángulos y lados iguales.

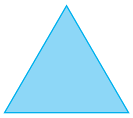
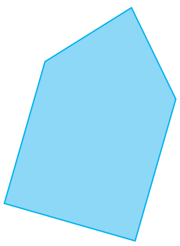
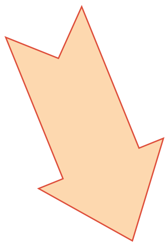
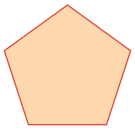
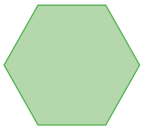
En los polígonos regulares distinguimos también:

- **Centro:** punto equidistante de los vértices y lados del polígono.
- **Radio:** segmento que une el centro con un vértice.
- **Apotema:** segmento perpendicular al lado que une el centro con el punto medio del lado.

Podemos clasificar los ángulos de un polígono en:

Ángulo central: formado por dos radios consecutivos con vértice en el centro del polígono.
Ángulo interior: formado por dos lados consecutivos.
Ángulo exterior: formado por un lado y la prolongación de su contiguo.

Podemos clasificar los polígonos por diferentes características:

Clasificación de los polígonos			
Número de lados		**Tipos de ángulos interiores**	
Triángulo  3 lados	Cuadrilátero  4 lados	Convexo  Todos sus ángulos interiores miden menos de 180º.	Cóncavo  Alguno de sus ángulos interiores mide más de 180º.
Pentágono  5 lados	Hexágono  6 lados		

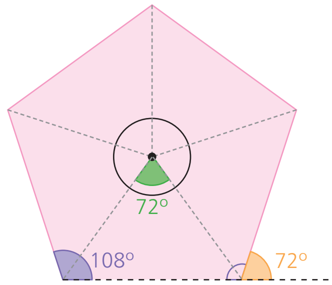
Practica y aprende

1. Indica cuáles de las figuras planas del margen son polígonos.

1.1. Ángulos de un polígono regular

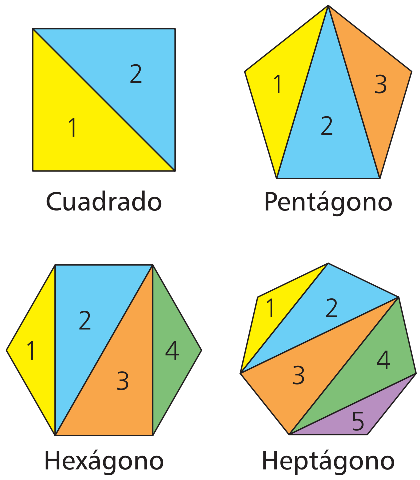
- **Ángulos centrales.** Dado que la unión de todos los ángulos centrales de un polígono de n lados forman un ángulo completo, la medida de cada uno de ellos es:

$$\widehat{A}_c = \frac{360^\circ}{n}$$



- **Ángulos interiores.** Observa que un polígono de n vértices se puede triangular formando $n - 2$ triángulos. Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180°, entonces la de los ángulos de un polígono de vértices es $180^\circ \cdot (n - 2)$. Ahora bien, como en los polígonos regulares todos los ángulos interiores miden lo mismo la medida de uno de ellos es:

$$\widehat{A}_i = \frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$



- **Ángulos exteriores.** Los ángulos interiores y exteriores de un polígono son suplementarios por lo tanto, la medida de un ángulo exterior es:

$$\widehat{A}_e = 180^\circ - \widehat{A}_i = \frac{360^\circ}{n}$$

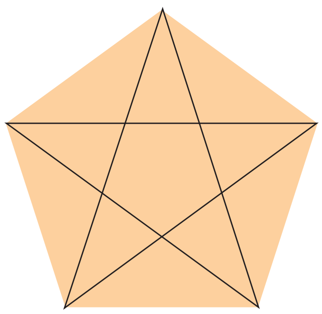
Ejemplo

Calculamos el valor de todos los ángulos de un pentágono regular:

- Ángulo central: $\widehat{A}_c = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
- Ángulo interior: $\widehat{A}_i = \frac{180^\circ \cdot (5-2)}{5} = 108^\circ$
- Ángulo exterior: $\widehat{A}_e = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$
- Suma ángulos interiores: $\sum \widehat{A}_i = 180^\circ \cdot (5-2) = 540^\circ$
- Suma ángulos interiores y exteriores: $\sum (\widehat{A}_i + \widehat{A}_e) = 180^\circ \cdot 5 = 900^\circ$

1.2. Diagonales de un polígono

Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos, entonces, desde cada uno de los vértices de un polígono se podrán trazar $n - 3$ diagonales. Así, para un polígono de n lados, teniendo en cuenta que una diagonal une dos vértices, tenemos:



El número de diagonales de un polígono de n lados es:

$$d = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Ejemplo

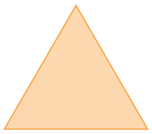
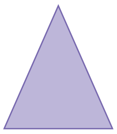
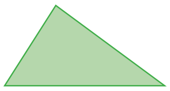
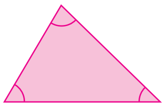
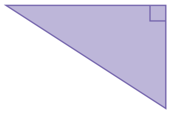
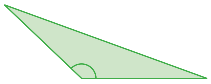
El número de diagonales de un pentágono será: $d = \frac{5 \cdot (5-3)}{2} = 5$

Practica y aprende

2. Dibuja un hexágono regular y señala en él sus elementos principales. Calcula el valor de todos sus ángulos y la suma de estos. ¿Cuántas diagonales tiene?

2 Triángulos

Clasificación de los triángulos

Medida lados			Medida ángulos		
Equilátero	Isósceles	Escaleno	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
					
Todos sus lados y ángulos son iguales.	Dos lados y ángulos iguales y uno desigual.	Todos los lados y ángulos de distinta medida.	Todos sus ángulos son agudos.	Uno de sus ángulos es recto (90°).	Uno de sus ángulos es obtuso.

Observa

- Si un triángulo tiene dos lados iguales también los ángulos opuestos a esos ángulos son iguales.
- Recíprocamente, los lados opuestos a ángulos iguales tienen la misma longitud.

Propiedades de los triángulos

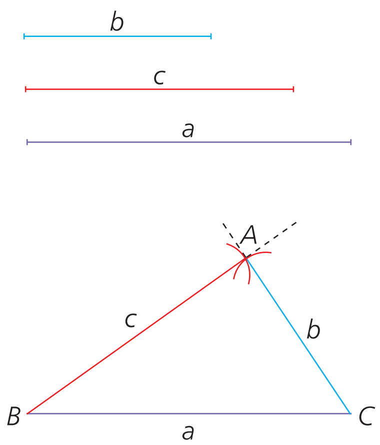
- La longitud de un lado cualquiera del triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos y mayor que la diferencia de ambas.
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

2.1. Construcción de triángulos

Construyamos triángulos con regla, compás y transportador.

Conocidos los tres lados *a*, *b* y *c*

1. Dibujamos el segmento *BC* de longitud *a*.
2. Tomamos la medida del segmento *b* con el compás. Dibujamos un arco de circunferencia de radio *b* con centro en *C*.
3. Tomamos la medida del segmento *c* con el compás. Dibujamos un arco de circunferencia de radio *c* con centro en *B*.
4. El tercer vértice, *A*, del triángulo es el punto de intersección de los dos arcos anteriores.



Practica y aprende

3. Indica si es posible construir un triángulo cuyos lados sean:

a. $a = b = c = 12$ cm
b. $a = 12$ m, $b = 15$ m y $c = 2$ m
c. $a = b = 4$ cm y $c = 2$ cm
d. $a = 3$ m, $b = 2$ m y $c = 5$ m

4. Calcula el ángulo $\widehat{C}$ de un triángulo del que se conocen $\widehat{A} = 42° \ 12' \ 42''$ y $\widehat{B} = 56° \ 3' \ 32''$.

5. Completa en la tabla del margen las casillas con SÍ o NO según sea posible que un triángulo cumpla, o no, ambas características a la vez.

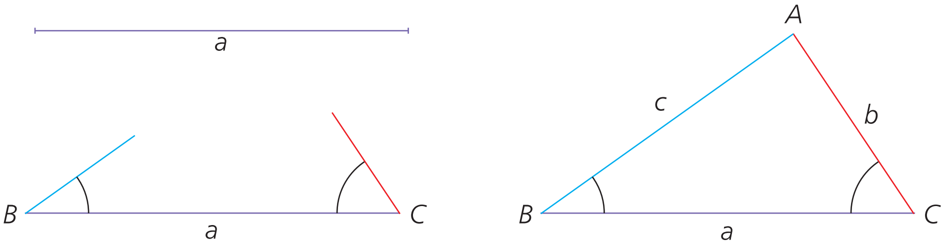
6. Construye un triángulo equilátero de 6 cm de lado.

7. Construye un triángulo isósceles cuyos lados iguales midan 8 cm y el desigual tenga una longitud de 5 cm.

	Equilátero	Isósceles	Escaleno
Acutángulo	…	…	…
Rectángulo	…	…	…
Obtusángulo	…	…	…

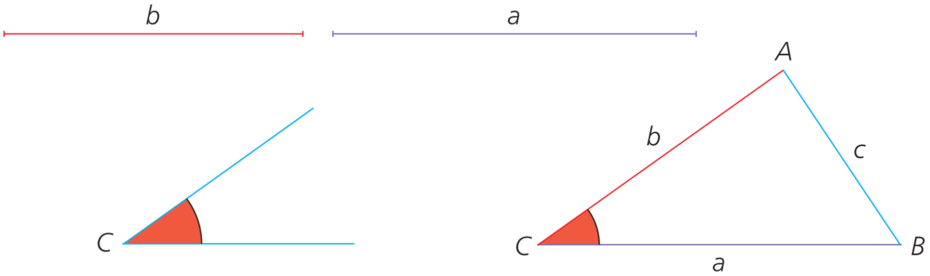
Conocido un lado *a* y los ángulos contiguos a este, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$

1. Dibujamos un segmento *BC* de longitud *a*.
2. Dibujamos, con el transportador, un ángulo de amplitud $\widehat{B}$ con vértice en *B*.
3. Análogamente, con vértice *C*, dibujamos un ángulo de amplitud $\widehat{C}$.
4. Prolongamos los lados de los ángulos dibujados con la regla hasta unirlos y conseguir el tercer vértice, *A*, del triángulo.



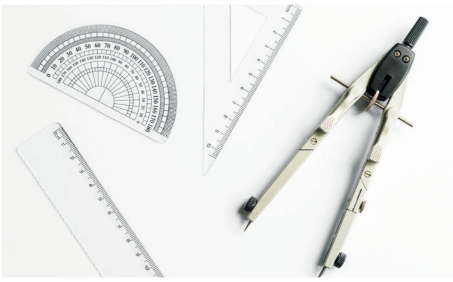
Conocidos dos lados *a* y *b* y el ángulo que forman, $\widehat{C}$

1. Dibujamos un segmento *BC* de longitud *a.*
2. Dibujamos con el transportador de ángulos, uno de amplitud $\widehat{C}$ con vértice en *C*.
3. Prolongamos el lado del ángulo dibujado con la regla hasta obtener un segmento, *CA*, de longitud *b*.
4. Unimos con la regla los puntos *A* y *B*.



Practica y aprende

8. Calcular el ángulo *x* en cada una de las figuras del margen.
9. Dibuja un triángulo que cumpla cada una de las características indicadas:
   a. Las longitudes de sus lados son 3 cm, 4 cm y 5 cm.
   b. Uno de sus lados mide 8 cm y sus ángulos adyacentes 30º y 50º.
   c. Las longitudes de dos lados consecutivos son 7 cm y 5 cm y el ángulo que forman tiene una amplitud de 50º.
10. La diagonal de un cuadrado divide a este en dos triángulos iguales. ¿Qué tipo de triángulos son?
11. ¿Cuál es el lado más corto de un triángulo cuyos ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ tienen las medidas: $\widehat{A} = 50º\ 22'\ 42''$ y $\widehat{B} = 85º\ 13'\ 32''$?
12. Construye un triángulo isósceles cuyo lado desigual mida 4 cm y los ángulos iguales sean de 30º. Para ello construye un triángulo equilátero cuyos lados midan 4 cm y traza las bisectrices de dos de sus ángulos.

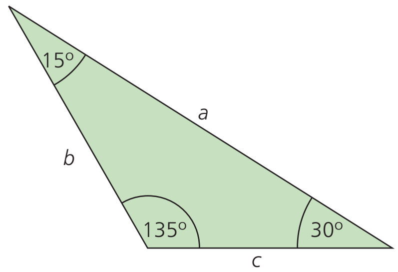


Observa

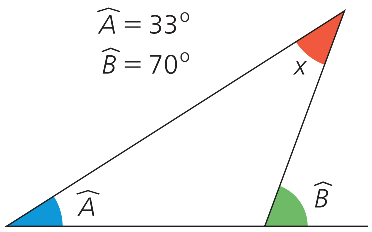
En un triángulo a mayor lado siempre se opone mayor ángulo.

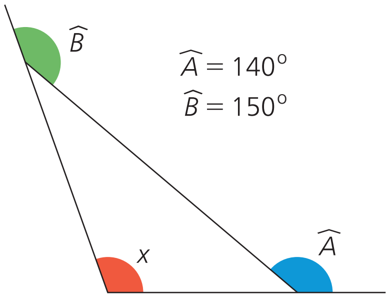
Ejemplo

Observa el triángulo dado.

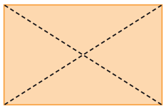
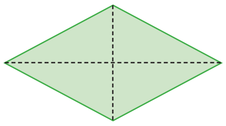
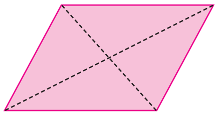
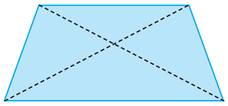
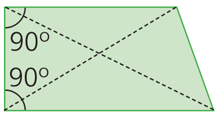
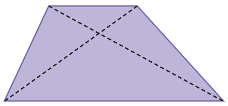
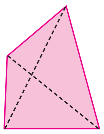
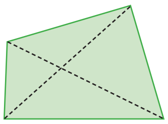


Como: 135º > 30º > 15º
Entonces: *a* > *b* > *c*





3 Cuadriláteros

Clasificación de los cuadriláteros			
Paralelogramos Son polígonos de **cuatro lados** con **lados paralelos** dos a dos y ángulos opuestos iguales. Sus diagonales se cortan en el centro del paralelogramo.			
Nombre	**Lados**	**Ángulos**	**Diagonales**
Rectángulo 	Iguales dos a dos.	Rectos (90º).	Iguales y oblicuas.
Rombo 	Iguales.	Iguales dos a dos. Dos ángulos agudos y dos obtusos.	Desiguales y perpendiculares.
Romboide 	Iguales dos a dos.	Iguales dos a dos. Dos ángulos agudos y dos obtusos.	Desiguales y oblicuas.
Trapecios Son polígonos de **cuatro lados** con **dos lados paralelos** (bases). Los ángulos que forma el lado no paralelo con las bases son suplementarios.			
Nombre	**Lados**	**Ángulos**	**Diagonales**
Trapecio isósceles 	Lados no paralelos iguales. Lados paralelos desiguales.	Iguales dos a dos (los ángulos que comparten base son iguales).	Iguales y oblicuas.
Trapecio rectángulo 	Desiguales.	Dos ángulos rectos (los formados por las bases y la altura).	Desiguales y oblicuas.
Trapecio escaleno 	Desiguales.	desiguales (dos ángulos obtusos y dos agudos).	Desiguales y oblicuas.
Trapezoides Son polígonos de **cuatro lados no paralelos.**			
Nombre	**Lados**	**Ángulos**	**Diagonales**
 	Desiguales.	Desiguales.	Desiguales y oblicuas.

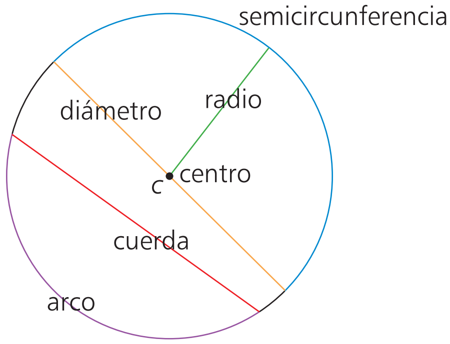
4 Circunferencia y círculo

La circunferencia y el círculo son figuras geométricas muy comunes en nuestro entorno: monedas, anillos, ruedas, arcos olímpicos…

La circunferencia de centro *O* y radio *r*, está formada por los puntos del plano que distan *r* de *O*.

Los elementos de la circunferencia son:

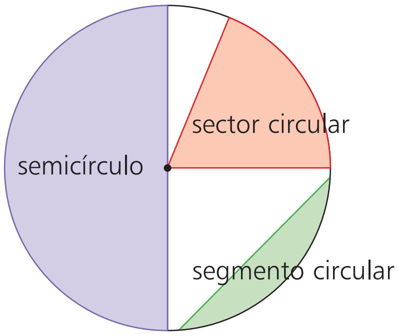
- **Centro:** punto interior de la circunferencia que equidista de todos los punto de la misma.
- **Radio:** segmento que une el centro de la circunferencia con uno de sus puntos.
- **Cuerda:** segmento que une dos puntos de la circunferencia.
- **Diámetro:** segmento que une dos puntos de la circunferencia diametralmente opuestos. Cuerda que pasa por el centro.
- **Arco:** parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos.
- **Semicircunferencia:** parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos diametralmente opuestos.



El círculo es la figura plana formada por la circunferencia y todos los puntos interiores a ella.

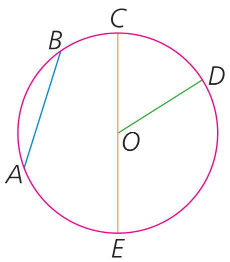
En un círculo podemos encontrar las siguientes regiones:

- **Sector circular:** región del círculo comprendida entre dos radios y el arco correspondiente.
- **Semicírculo:** región del círculo comprendida entre un diámetro y la semicircunferencia.
- **Segmento circular:** región del círculo comprendida entre una cuerda y el arco que forma.



Practica y aprende

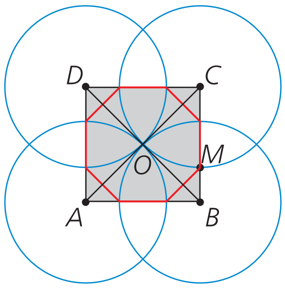
13. Indica qué nombre reciben los segmentos *AB*, *CE* y *OD* de la figura del margen.



14. Representa tres puntos *A*, *B* y *C*, y luego traza la circunferencia que pasa por ellos. Indicación: el centro de la circunferencia buscada es el punto de corte de las mediatrices de los segmentos *AB* y *BC*.

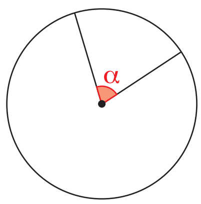
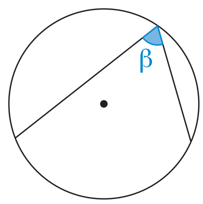
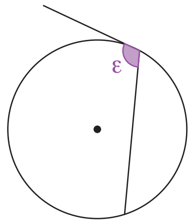
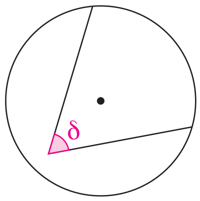
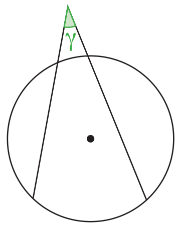
15. Construye un octógono regular a partir de un cuadrado y unas circunferencias siguiendo las siguientes indicaciones:

- Construye un cuadrado *ABCD*.
- Traza sus dos diagonales *AC* y *BD*, y llama *O* a su punto de intersección.
- Dibuja 4 semicircunferencias con centro en cada uno de los vértices del cuadrado y de modo que todas ellas pasen por *O*.
- Traza el polígono que tiene por vértices los puntos de corte de las circunferencias con los lados del cuadrado.



4.1. Ángulos en la circunferencia

Dada una circunferencia podemos dibujar ángulos que se relacionan con ella, y se nombran según la posición que ocupa el vértice y los lados del ángulo respecto a la circunferencia.

Ángulo central	Ángulo inscrito	Ángulo semiinscrito	Ángulo interior	Ángulo exterior
				
Su vértice es el centro de la circunferencia y sus lados son radios de esta.	Su vértice es un punto de la circunferencia y sus lados son cuerdas de esta.	Su vértice es un punto de la circunferencia, uno de sus lados es una cuerda y el otro es tangente a esta.	Su vértice es un punto interior a la circunferencia.	Su vértice es un punto exterior a la circunferencia.

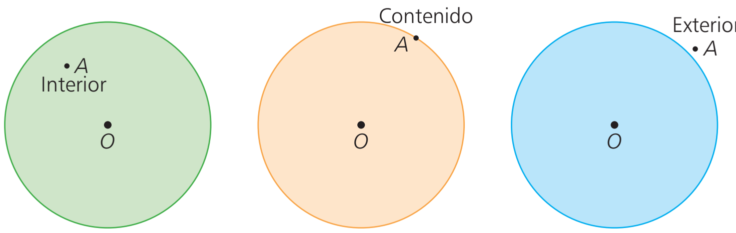
Mary Cartwright (1900 - 1998)

Fue la primera mujer en recibir la Medalla Sylvester para la investigación matemática y la primera en ocupar el cargo de presidenta de la London Mathematical Society.

En 1919, fue una de las cinco mujeres que estudiaban matemáticas en la Universidad de Oxford.

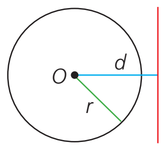
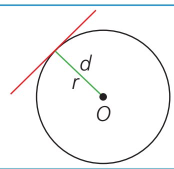
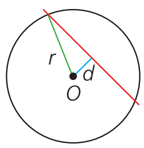
4.2. Posición relativa de punto y circunferencia

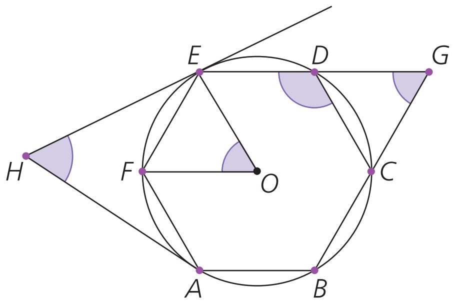
Las posibles posiciones de un punto *A* respecto a una circunferencia son:



4.3. Posición relativa de recta y circunferencia

Las posiciones de una recta *r* respecto a una circunferencia son:

Exterior	La recta y la circunferencia no tienen puntos en común. La distancia del centro de la circunferencia a la recta es mayor que la longitud del radio. $d > r$	
Tangente	La recta y la circunferencia tienen un punto en común. La distancia del centro de la circunferencia a la recta es igual que la longitud del radio. $d = r$	
Secante	La recta y la circunferencia tienen dos puntos en común. La distancia del centro de la circunferencia a la recta es menor que la longitud del radio. $d < r$	

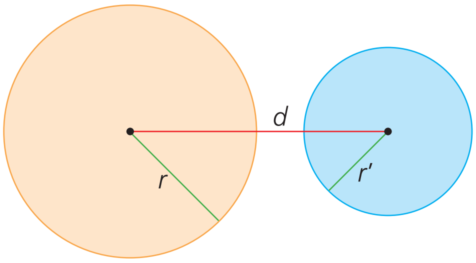


Practica y aprende

16. Indica qué nombre reciben los ángulos: $\measuredangle EOF$, $\measuredangle EDC$, $\measuredangle DGC$ y $\measuredangle AHE$, en relación a la circunferencia del margen.

4.4. Posición relativa de dos circunferencias

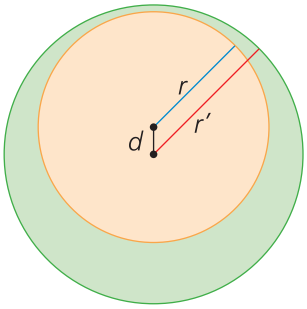
Las posiciones de dos circunferencias pueden ser:



Exteriores

Las circunferencias no tienen puntos en común. La distancia entre los centros es mayor que la suma de las longitudes de los radios.

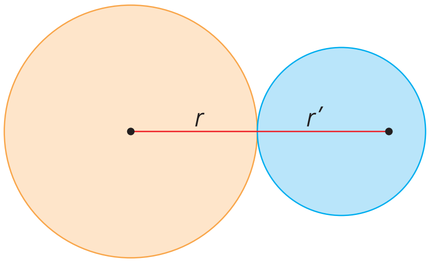
$$d > r + r'$$



Interiores

Las circunferencias no tienen puntos en común. La distancia entre los centros es menor que la diferencia de las longitudes de los radios.

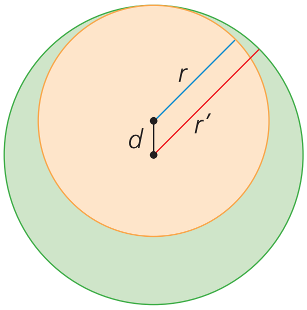
$$d < |r - r'|$$



Tangentes exteriores

Las circunferencias tienen un punto en común. La distancia entre los centros es igual a la suma de las longitudes de los radios.

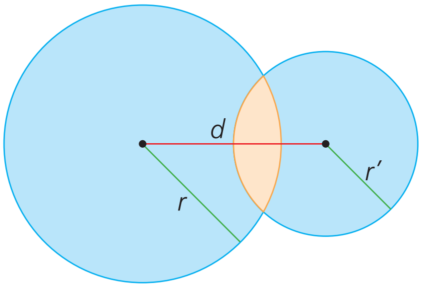
$$d = r + r'$$



Tangentes interiores

Las circunferencias tienen un punto en común. La distancia entre los centros es igual a la diferencia de las longitudes de los radios.

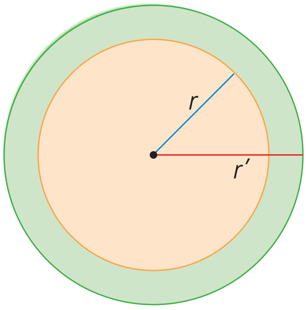
$$d = |r - r'|$$



Secantes

Las circunferencias tienen dos puntos en común. La distancia entre los centros es menor que la suma de las longitudes de los radios y mayor que su diferencia.

$$|r - r'| < d < r + r'$$



Concéntricas

Las circunferencias tienen el mismo centro.

$$d = 0$$

Practica y aprende

17. Dibuja los siguientes ángulos respecto a una circunferencia:

a. Dos ángulos centrales.

b. Dos ángulos inscritos.

c. Dos ángulos interiores.

d. Dos ángulos exteriores.

18. ¿Cómo son una recta y una circunferencia si el radio de esta es de 1 dm y la distancia de su centro a la recta es de 6 cm? ¿Y si la distancia es de 12 cm? ¿A qué distancia tendría que estar para ser tangente a la circunferencia?

19. Determina qué posiciones relativas delimitan las siguientes circunferencias:

a. d = 15 cm; r = 7 cm; r' = 3 cm

b. d = 8 cm; r = 6 cm; r' = 2 cm

c. d = 11 cm; r = 4 cm; r' = 16 cm

d. d = 10 cm; r = 7 cm; r' = 5,5 cm

20. Dibuja dos circunferencias tangentes interiores cuyos centros disten 9 cm. Dibuja, también, dos circunferencias concéntricas.

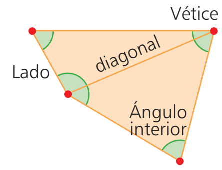
Para recordar

FIGURAS PLANAS ELEMENTALES

Polígonos

Región del plano delimitada por una línea poligonal cerrada.
Sus elementos son lados, vértices, ángulos y diagonales.
En los polígonos regulares distinguimos también el centro, radio y apotema.
Los polígonos se clasifican según:

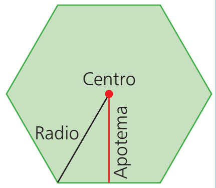
- Su número de lados: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos…
- La medida de sus ángulos: cóncavo y convexo.



Ángulos centrales: $A_c = \dfrac{360^{\circ}}{n}$

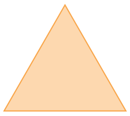
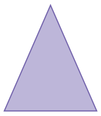
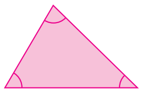
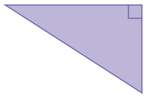
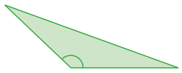
Ángulos interiores: $A_i = \dfrac{180^{\circ} \cdot (n-2)}{n} = 180^{\circ} - \dfrac{360^{\circ}}{n}$

Ángulos exteriores: $A_e = 180^{\circ} - A_i$



Triángulos

Clasificación de los triángulos

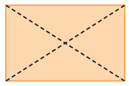
Medida lados			Medida ángulos		
Equilátero	Isósceles	Escaleno	Acutángulo	Rectángulo	Obtusángulo
					
Todos sus lados y ángulos son iguales.	Dos lados y ángulos iguales y uno desigual.	Tres lados y ángulos de distinta medida.	Todos sus ángulos son agudos.	Uno de sus ángulos es recto (90º).	Uno de sus ángulos es obtuso (mide más de 90º).

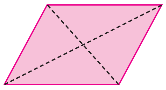
Se pueden construir triángulos:

- Conocidas las longitudes de sus tres lados.
- Conocidas las longitudes de dos de sus lados y la amplitud del ángulo que forman.
- Conocidas las amplitudes de dos ángulos y la longitud de uno de sus lados.

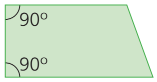
Cuadriláteros

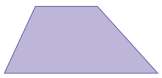
Paralelogramos: cuatro lados paralelos dos a dos y ángulos opuestos iguales. Las diagonales se cortan en el centro del polígono.
Los paralelogramos se clasifican en: cuadrado, rectángulo, rombo y romboide.



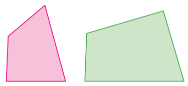


Trapecios: cuatro lados con dos paralelos (bases). Los ángulos que forman los lados no paralelos con las bases son suplementarios.
Los trapecios se clasifican en: isósceles, rectángulo y escaleno.





Trapezoides: polígonos de cuatro lados no paralelos.

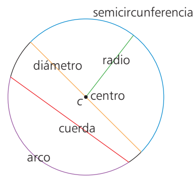


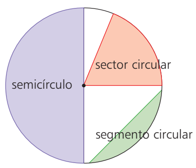
Circunferencia y círculo

La circunferencia está formada por los puntos que equidistan de un único punto llamado **centro, *C*,** una determinada distancia llamada **radio, *r*.**
El círculo es la figura plana formada por la circunferencia y todos los puntos interiores a ella.

Posiciones relativas

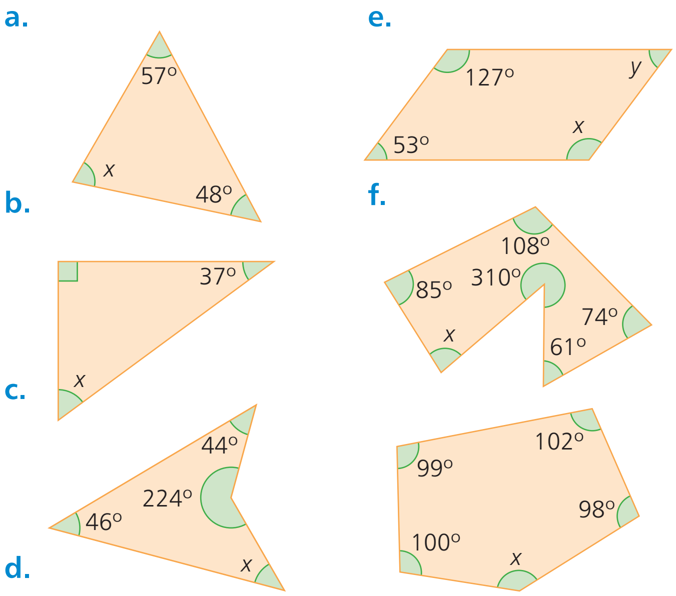
Punto-circunferencia	Recta-circunferencia	Dos circunferencias
Interior. Exterior. Contenido.	Exterior. Tangente. Secante.	Interiores, exteriores, tangentes, secantes, concéntricas.



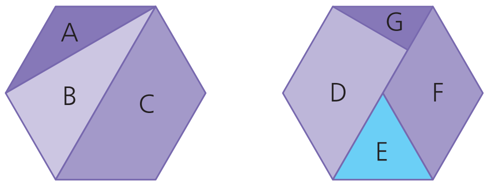


Para practicar

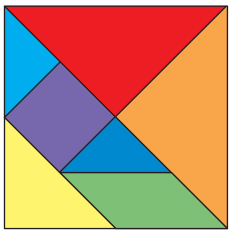
1. Si el ángulo interior de un polígono regular tiene una amplitud de 120º, ¿cuánto mide su ángulo exterior? ¿De qué polígono se trata?
2. Si el ángulo exterior de un polígono regular mide 45º, ¿cuánto mide su ángulo interior? ¿De qué polígono se trata?
3. ¿Cuánto miden los tres ángulos exteriores de un triángulo si los tres interiores miden 25º, 85º y 70º?
4. Si la suma de los ángulos interiores y exteriores de un polígono es 720º, ¿de qué polígono se trata? ¿Y si esa suma es de 1260º? ¿Y de 1620º?
5. ¿Cuántos lados tiene un polígono que tiene dos diagonales? ¿Y si tiene cinco diagonales?
6. ¿Se puede formar un triángulo con tres segmentos de 5, 3 y 8 cm? ¿Y con tres de 10, 16 y 5 cm? Justifica tus respuestas.
7. ¿Se puede construir un triángulo que tenga dos ángulos rectos?
8. Si uno de los ángulos iguales de un triángulo isósceles es de 84º, ¿cuánto mide el ángulo desigual?
9. Construye un triángulo equilátero de 16 cm de lado.
10. Construye un triángulo rectángulo e isósceles cuyos catetos midan 12 cm.
11. Construye un triángulo rectángulo que tenga un cateto de 10 cm y un ángulo agudo de 30º.
12. Construye un triángulo que tenga un lado de 10 cm y los dos ángulos contiguos midan 60º y 45º.
13. [2] Calcula el valor del ángulo que falta en los siguientes polígonos:



14. Dibuja y escribe los nombres de los siguientes cuadriláteros teniendo en cuenta que tienen:
    - **a.** Los lados paralelos dos a dos.
    - **b.** Los 4 lados iguales y 4 ángulos rectos.
    - **c.** Lados iguales dos a dos y 4 ángulos rectos.
    - **d.** Los 4 lados iguales y ángulos iguales dos a dos.
    - **e.** Lados y ángulos iguales dos a dos.
    - **f.** Solo dos lados paralelos.
    - **g.** Un lado no paralelo perpendicular a los lados paralelos.
    - **h.** Lados no paralelos iguales.
    - **i.** Lados no paralelos desiguales y no perpendiculares a los paralelos.
    - **j.** Los lados no son paralelos.
15. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.
    - **a.** En un paralelogramo las diagonales se cortan perpendicularmente.
    - **b.** En un trapecio isósceles la longitud de los lados no paralelos es la misma.
    - **c.** Un romboide es un paralelogramo que tiene los lados y los ángulos iguales dos a dos.
    - **d.** Un trapezoide es un cuadrilátero con un par de lados paralelos.
16. [3] Observa las siguientes figuras y clasifica los polígonos que las forman:



17. Conocida la medida de los cuatro lados de un cuadrilátero, ¿podrías determinar de qué cuadrilátero se trata o necesitas algún dato más?
18. Conocida la medida de los cuatro ángulos de un cuadrilátero, ¿podrías determinar de qué cuadrilátero se trata o necesitas algún dato más?
19. Clasifica cada una de las piezas del tangram.



Para practicar

20. Si uno de los ángulos de un paralelogramo mide 36°, ¿cuánto miden el resto de los ángulos?

21. Halla el valor de los ángulos central, interior y exterior de cada uno de los siguientes polígonos regulares:

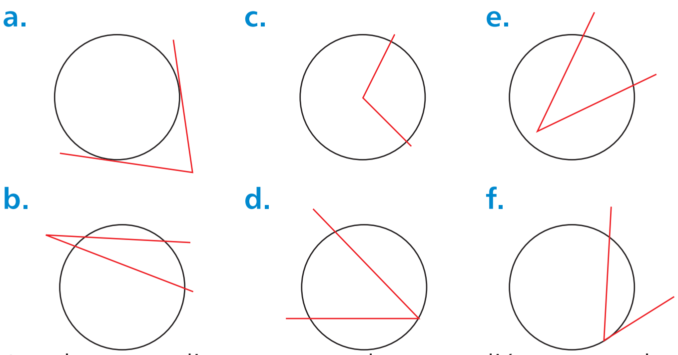
a. Triángulo. **d.** Decágono.
b. Hexágono. **e.** Eneágono.
c. Octógono. **f.** Dodecágono.

¿Cuántas diagonales tiene cada uno de los polígonos?

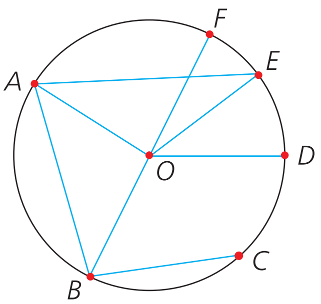
22. Completa la siguientes tabla:

	Semejanzas	Diferencias
Paralelogramo trapecio	…	…
Trapecio – trapezoide	…	…
Paralelogramo – trapezoide	…	…

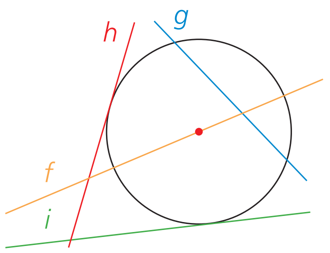
23. Indica el nombre de los siguientes ángulos con respecto a la circunferencia en cada caso:



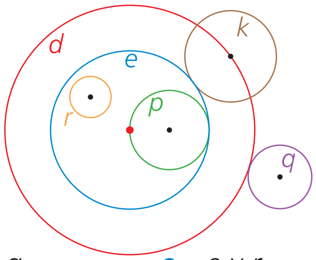
24. Señala tres radios, tres cuerdas y un diámetro en la siguiente figura.



25. Indica la posición relativa de cada una de estas rectas respecto a la circunferencia:



26. Indica la posición relativa de los siguientes pares de circunferencias:



a. *d* y *e* **c.** *d* y *q* **e.** *e* y *r*
b. *d* y *k* **d.** *d* y *p* **f.** *e* y *p*

27. Las distancias de los puntos *A*, *B*, *C*, *D* y *E* al centro de una circunferencia de radio 10 cm son, respectivamente, 12, 10, 7, 5 y 13 cm. ¿Qué posición ocupan dichos puntos respecto de la circunferencia?

28. Las distancias del centro de una circunferencia de radio 8 cm a las rectas *r*, *s*, *t*, *p* y *q* son, respectivamente, 9, 5, 8, 7 y 10 cm. ¿Cuáles son las posiciones relativas de las rectas y la circunferencia?

29. Dadas dos circunferencias de radios 10 y 6 cm, ¿cuáles son, en cada caso, las posiciones relativas de las dos circunferencias, si las distancias entre sus centros son: 20, 13, 16, 50 y 18 cm?

Situación de aprendizaje

30. ¿Todos los edificios tienen las paredes rectas?

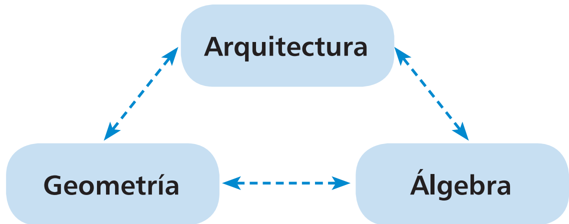
a. Estos edificios tienen nombre. ¿Podrías investigar cuáles son? (Pista: uno es chino y el otro alemán).

b. ¿Cómo definirías la forma de cada uno de ellos?

c. ¿A qué obedece este tipo de diseño?

d. En grupos de 4, realizad un mural con edificios singulares próximos, explicando sus peculiaridades.

e. Después de haber trabajado esta unidad, ¿cuál dirías que es la relación entre estos tres conceptos?



Elabora una redacción de unas 100 palabras para explicarlo.

Autoevaluación A

1. Halla el valor de los ángulos central, interior y exterior de cada uno de los siguientes polígonos regulares:

a. Cuadrilátero.

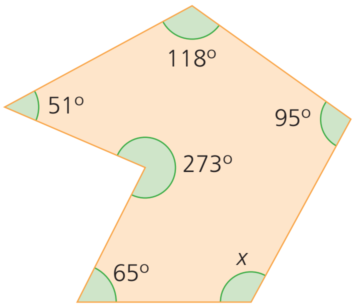
b. Pentágono.

c. Isodecágono (20 lados).

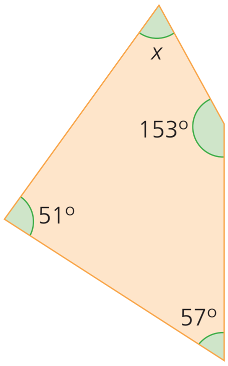
¿Cuántas diagonales tienen cada uno de los polígonos?

2. Determina la amplitud del ángulo que falta en cada uno de los siguientes polígonos:

a.



b.



3. Dibuja un triángulo que cumpla cada una de las siguientes condiciones:

a. Las longitudes de sus lados son 6 cm, 8 cm y 10 cm.

b. La longitud de uno de sus lados es 5 cm y sus ángulos consecutivos 40º y 60º.

c. La longitud de dos lados consecutivos son 4 cm y 7 cm y el ángulo que forman tiene una amplitud 60º.

4. Se divide una circunferencia en ocho partes iguales y se numeran 1, 2, 3, 4…

a. Si se unen las divisiones 1, 3, 6, 8, 1, ¿qué clase de cuadrilátero se forma?

b. Si se unen las divisiones 1, 2, 5, 6, 1, ¿qué clase de cuadrilátero se obtiene? ¿Cuánto miden sus ángulos?

5. Si se divide una circunferencia en diez partes iguales y se numeran las divisiones, ¿qué clase de polígono se obtiene uniendo las divisiones 1, 3, 5, 7, 9, 1? ¿Cuánto miden sus ángulos?

6. Dibuja una circunferencia y las siguientes rectas en las posiciones indicadas:

a. Recta *r* es secante.

b. Recta *s* es exterior.

c. Recta *t* es tangente.

7. Dibuja dos circunferencias en las disposiciones que se indican:

a. Secantes.

b. Tangentes interiores.

c. Tangentes exteriores.

d. Exteriores.

e. Una interior a otra.

8. ¿Cómo es la recta que une dos puntos que están situados a 18 y 12 cm del centro de una circunferencia de 15 cm de radio? ¿Y la recta que une dos puntos que están a 25 y 0 cm del centro de una misma circunferencia?

9. ¿Pueden tener dos circunferencias una única tangente común? ¿En qué casos?

10. ¿Cómo son entre sí dos circunferencias de radios iguales a 10 cm si la distancia entre sus centros es también 10 cm? ¿Y si es 20 cm? ¿Y si es nula?

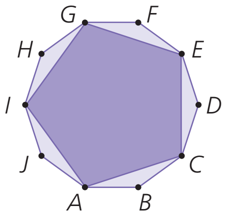
Proyecto

Construir algunos polígonos con GeoGebra.

- GeoGebra presenta dos herramientas muy útiles para la construcción de polígonos.

	Polígono	Se crean los vértices del polígono, pinchando, uno a uno volviendo al primero.
	Polígono regular	Hemos de seleccionar dos vértices consecutivos y a continuación introducir el número de lados del polígono buscado.

Actividad 1

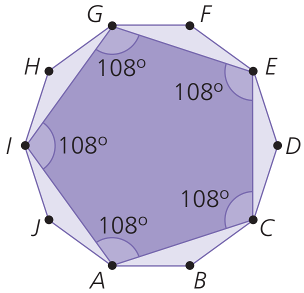


Con las herramientas anteriores construye un decágono regular. Después construye el polígono que resulta de unir 5 vértices alternos del decágono anterior.

- Con la siguiente herramienta puedes obtener la amplitud de un ángulo.

	Ángulo	Hemos de seleccionar tres puntos o dos rectas.

Actividad 2

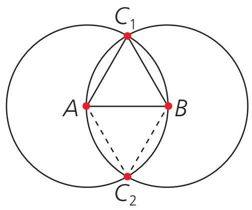


Vamos a comprobar que el pentágono que hemos construido en el ejercicio anterior es regular, para ello veremos que todos sus ángulos son iguales, empleando la herramienta ángulo.

- A continuación, te mostramos un par de herramientas con las que podrás realizar la construcción, de un triángulo equilátero, aprendida en la unidad.

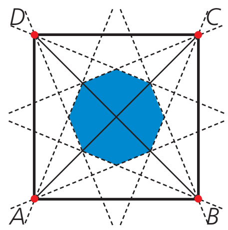
	Circunferencia (centro-punto)	Seleccionamos dos puntos: el centro de la circunferencia y un punto por el que pasa.
	Intersección	Seleccionamos los dos objetos a intersecar.

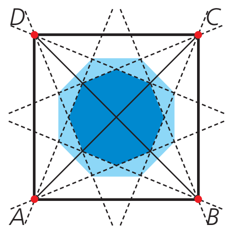
Actividad 3



Dibuja dos puntos cualesquiera A y B y construye un triángulo equilátero que los tenga por vértice.

Actividad 4





Sigue los siguientes pasos para construir un octógono regular.

1. Dibuja un cuadrado y sus dos diagonales.
2. Dibuja las 8 bisectrices de los ángulos formados por un lado del cuadrado y la diagonal. Puedes trazarlas tal y como aprendiste en la unidad 8 o empleando la herramienta bisectriz.
3. Determina los puntos de corte de las bisectrices trazadas.
4. Señala el octógono regular que has obtenido en el centro del cuadrado cuyos vértices son los 8 puntos de corte de las bisectrices.
5. Observa los puntos de corte de las bisectrices y verás que puedes encontrar otros 8 puntos que forman otro octógono regular.

Proyecto

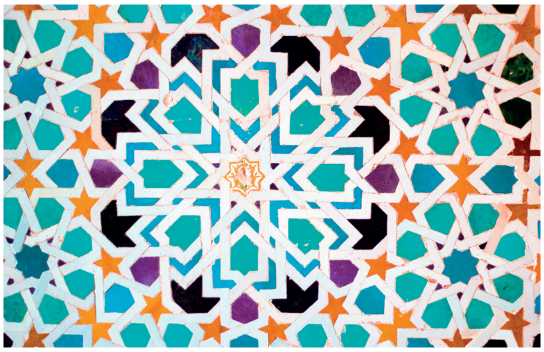
Construir un mosaico con figuras geométricas conocidas.

Denominamos mosaico al recubrimiento del plano mediante figuras geométricas llamadas teselas.

Para que un recubrimiento del plano con figuras geométricas pueda considerarse como tal se deben cumplir dos condiciones:

- Las figuras no pueden superponerse.
- No pueden quedarse huecos sin cubrir.

Así definido, el número de mosaicos que se pueden construir es ilimitado. Un claro ejemplo de ello son los mosaicos que decoran las paredes de la Alhambra (Granada), obra cumbre del arte musulmán en Europa.



En función del número de polígonos diferentes empleados con la construcción del mosaico, podemos distinguir numerosos tipos:

Actividad 1

El más sencillo de todos es el **mosaico regular.**

Los mosaicos regulares están formados por un único tipo de polígono regular y estos concurren en los vértices (triángulo equilátero, cuadrado y hexágono).

Construye con GeoGebra un mosaico regular, usando una disposición diferente a la anterior, con triángulos equiláteros y otros dos con hexágonos, juega con los colores para hacer tu mosaico.