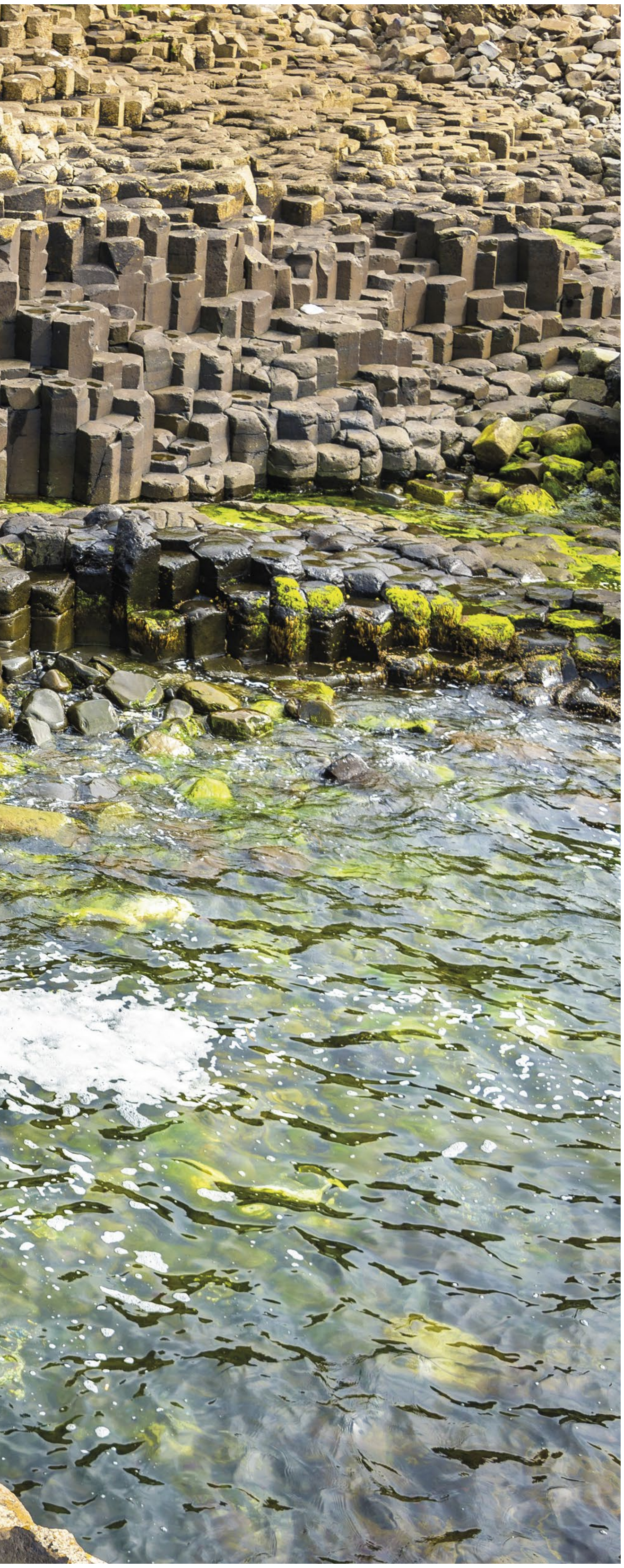
Saberes básicos

Competencias clave / Actividades / Situaciones de aprendizaje	
1 Competencia en comunicación lingüística (CCL).	Situaciones de aprendizaje
2 Competencia plurilingüe (CP).	Colaborativo
3 Competencia matemática y competencia en ciencia y tecnología (STEM).	En pareja
4 Competencia digital (CD).	Sostenibilidad y medioambiente

Competencias clave / Actividades / Situaciones de aprendizaje
5 Competencia personal, social y de aprender a aprender (CPSAA).
6 Competencia ciudadana (CC).
7 Competencia emprendedora (CE).
8 Competencia en conciencia y expresión culturales (CCEC).

UNIDAD 6

Geometría del plano



En esta unidad aprenderás a...

- Conocer y manejar relaciones entre ángulos generados por rectas.
- Utilizar el teorema de Tales y sus aplicaciones.
- Calcular la suma de los ángulos de un polígono convexo y el ángulo interior de un polígono regular cualquiera.
- Utilizar el teorema de Pitágoras y sus aplicaciones.
- Reconocer y describir elementos y propiedades de figuras planas.
- Calcular el perímetro y el área de polígonos y figuras circulares.

¡Comienza leyendo!

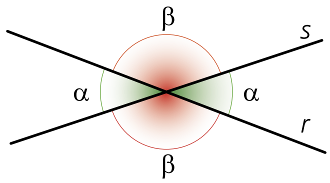
La *Calzada del Gigante* es una formación rocosa muy espectacular que se encuentra en Irlanda del Norte. Existe una leyenda que relaciona estas columnas hexagonales con una rivalidad entre gigantes, pero su origen está menos relacionado con la magia de los cuentos y más con la de la naturaleza y las matemáticas.

Hace 50 o 60 millones de años, esa zona se inundó de lava y se formó una meseta de roca líquida. Al enfriarse muy rápidamente, se resquebrajó de forma parecida a como lo hace la tierra enfangada, creándose una red poligonal. Pero en este caso las grietas siguieron verticalmente hacia abajo formando esos prismas hexagonales tan peculiares, resultado del camino más eficiente que casi siempre sigue la naturaleza para economizar materia y espacio.

Responde

- ¿Dónde pondrías una antena de móviles que tuviese que dar servicio a tres poblaciones?
- ¿Cómo sabes que dos figuras son semejantes?
- ¿En qué punto apoyarías una placa triangular sobre una columna para que se mantuviese en equilibrio?
- Si tienes un móvil puedes descargarte **GeoGebra.** ¿Sabes hallar el incentro de un triángulo con esta app?
- ¿Por qué las colmenas de las abejas son hexagonales?
- ¿Cómo puedes saber la distancia real entre dos ciudades al mirar un mapa?

1 Ángulos y triángulos

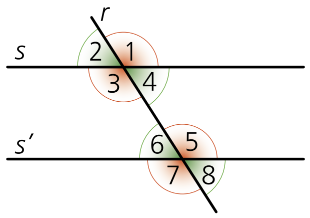


En geometría hay unos conocimientos básicos sobre ángulos y triángulos que es importante que adquieras.

1.1. Ángulos formados por rectas que se cortan

Dos rectas que se cortan forman cuatro ángulos opuestos por el vértice dos a dos.

Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.

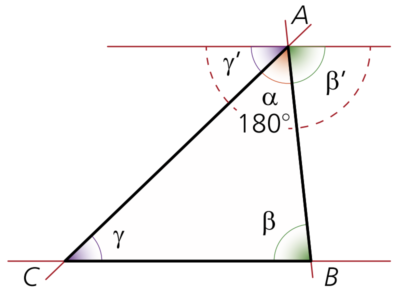


Dos rectas paralelas cortadas por otra recta forman ocho ángulos que se relacionan de la siguiente manera:

- Los **ángulos alternos internos** son iguales entre sí: 4 y 6, 3 y 5.
- Los **ángulos alternos externos** son iguales entre sí: 1 y 7, 8 y 2.
- Los **ángulos correspondientes** son iguales entre sí: 2 y 6, 3 y 7, 1 y 5, 4 y 8.

1.2. Suma de los ángulos de un triángulo

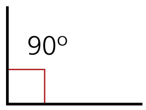
La suma de los ángulos de un triángulo es siempre 180º.



Observa que, si trazamos una paralela al lado *BC* del triángulo *ABC*, los lados del triángulo forman una secante cortando a dos paralelas. Así se ve claramente que los ángulos β y β′ y γ y γ′, son iguales entre sí por ser alternos internos.

Comprobamos por tanto que la suma de los tres ángulos es 180º.

Los ángulos rectos se representan con un cuadrado.



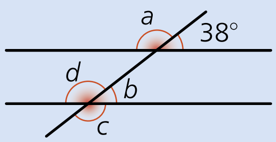
Practica y aprende

1. Di cuánto valen los ángulos de un triángulo:

a. Con un ángulo de 60º y otro de 85º.

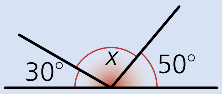
b. Equilátero.

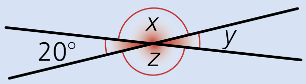
c. Isósceles con el ángulo desigual de 70º.

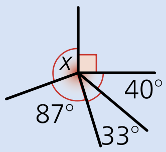


2. Halla *a, b, c* y *d*.

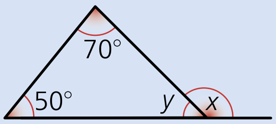
3. Halla los ángulos desconocidos, justificando en cada caso el resultado.

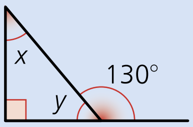


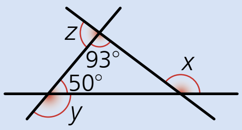




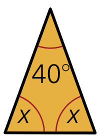
4. Halla los ángulos que faltan en cada caso.

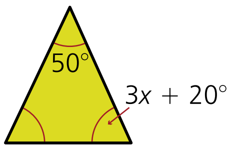






5. Halla *x* en los triángulos isósceles del margen.



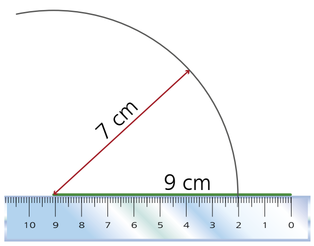


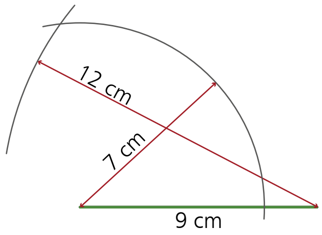
1.3. Dibujar triángulos

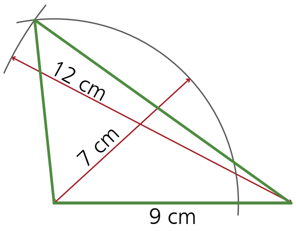
Con regla y compás

Dibujo de un triángulo dados sus tres lados.

Dibuja con regla y compás un triángulo de lados 7 cm, 9 cm y 12 cm.

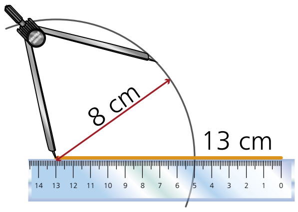


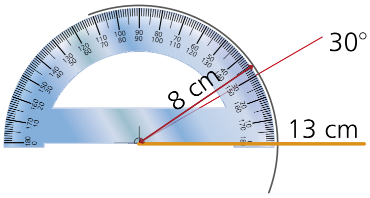


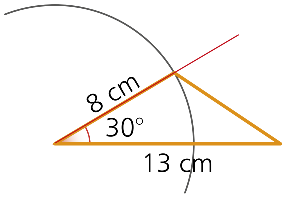


Dibujo de un triángulo dado un ángulo y los dos lados adyacentes.

Dibuja usando un cartabón, regla y compás, un triángulo con un ángulo de 30º y sus lados adyacentes de 8 cm y 13 cm.







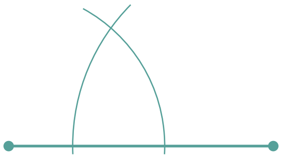
Con GeoGebra

Dibujo de un triángulo dados sus tres lados

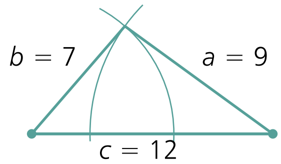
Dibuja un triángulo de lados 7, 9 y 12.

Con la herramienta segmento de longitud dada, , dibuja un segmento de lado 12.

Con la herramienta circunferencia (centro, radio), , dibuja dos circunferencias, cada una con centro en un extremo del segmento, de 7 y de 9.



Donde se cortan las circunferencias añade un punto, , y con la herramienta polígono, , crea el triángulo sobre los tres puntos.



Dibujo de un triángulo dado un ángulo y los dos lados adyacentes

Utiliza las herramientas segmento de longitud dada, , luego la de ángulo dada su amplitud, , después circunferencia (centro, radio), , y finalmente segmento dados dos puntos, .

Practica y aprende

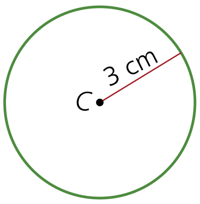
6. Dibuja un triángulo tal que:

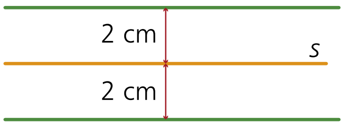
a. Tenga lados de 3 cm, 4 cm y 5 cm.

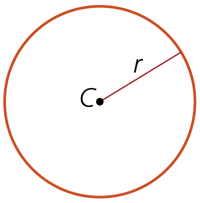
b. Tenga lados de 10 cm, 11 cm y 12 cm.

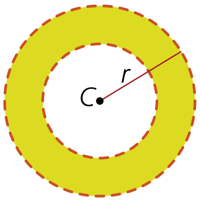
c. Tenga un ángulo de 45º y los lados adyacentes de 10 cm y 13 cm.

d. $A = 45º$, $b = 10$ cm y $a = 9$ cm.









2 Lugares geométricos

- Marca un punto, *C*, y dibuja los puntos que distan 3 cm de *C*.
- Dibuja una recta, *r*, y traza los puntos que distan 2 cm de ella.

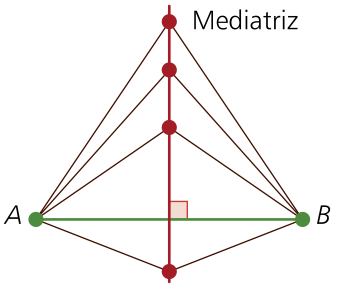
A veces resulta interesante conocer qué figura generan los puntos que cumplen una condición, o propiedad. Incluso, definir elementos geométricos por sus propiedades. En lenguaje matemático esto se expresa con **«el lugar geométrico de los puntos que…».**

2.1. La circunferencia

La **circunferencia** de centro *C* y radio *r* es el lugar geométrico de los puntos del plano que distan *r* del punto *C*.

Ejemplo

Dibuja el lugar geométrico de los puntos que distan más de 3 cm, pero menos de 5 cm de un punto *C*.

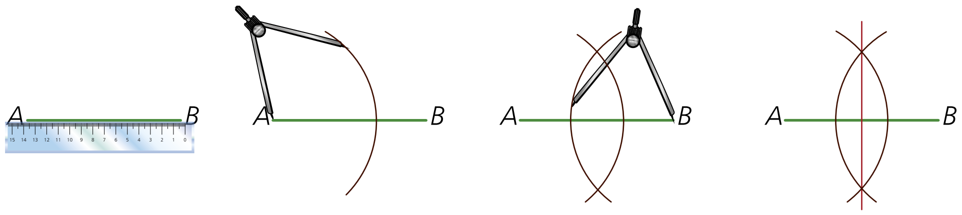


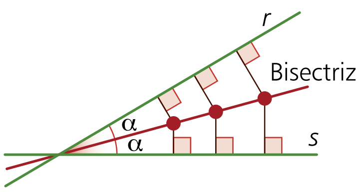
2.2. La mediatriz

La **mediatriz** de un segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia (equidistan) de *A* y de *B*.

Observa que la mediatriz del segmento es perpendicular a este.

Construcción de la mediatriz con regla y compás:



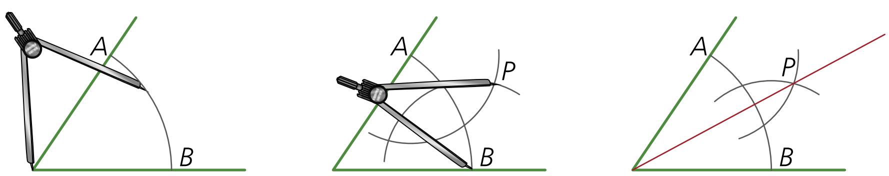


2.3. La bisectriz

La **bisectriz** del ángulo formado por dos semirrectas, *r* y *s*, es el lugar geométrico de los puntos del plano que están a la misma distancia (equidistan) de las dos rectas.

La bisectriz de un ángulo divide el ángulo en dos iguales.

Construcción de la bisectriz con regla y compás:

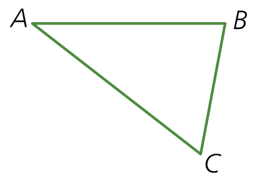


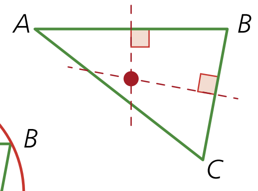
Ejemplo

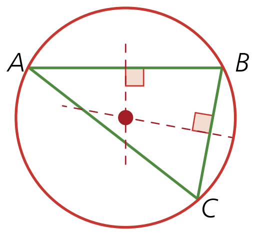
Halla la circunferencia circunscrita al triángulo *ABC*.

Para encontrar el centro de esta circunferencia tenemos que buscar el punto que esté a la misma distancia de *A*, *B* y *C*.

- Sabemos encontrar los puntos que están a la misma distancia de *A* y de *B*. Son los puntos de la mediatriz de $\overline{AB}$.
- También los puntos que están a la misma distancia de *B* y de *C*. Son los puntos de la mediatriz de $\overline{BC}$.
- El punto en el que se corten ambas mediatrices será el que equidiste de los vértices del triángulo.







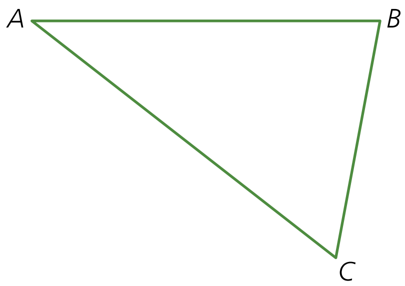
Practica y aprende

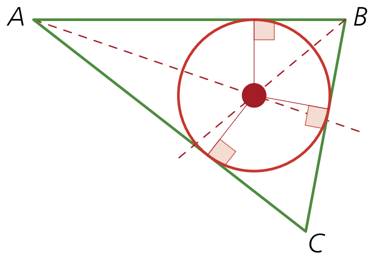
7. Halla la circunferencia inscrita al triángulo ABC. Para encontrar la circunferencia tenemos que buscar los puntos que equidisten de los tres lados. Así:

a. Busca, y dibuja, los puntos que equidistan del lado $\overline{AB}$ del $\overline{AC}$. ¿Qué puntos cumplen esa condición?

b. Busca, y dibuja, los puntos que equidistan del lado $\overline{AC}$ del $\overline{BC}$.

c. Con el compás, traza la circunferencia inscrita al triángulo.





8. Halla el lugar geométrico de los puntos del plano que distan 2 cm de los lados de un rectángulo de lados 4 cm y 3 cm. ¿Cuántas figuras has obtenido?

9. Tres ciudades, A, B y C, están localizadas de manera que ocupan los vértices de un triángulo isósceles de lados iguales 40 km y lado desigual, $\overline{AC} = 50$ km. Si se quiere colocar una antena de móvil de forma que equidiste de A y de B y esté a menos de 30 km de C, ¿dónde podrá colocarse la antena?

a. Encuentra los puntos que equidistan de A y de B.

b. Encuentra los puntos que están a menos de 30 km de C.

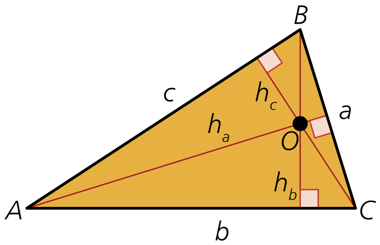
c. Señala los puntos que cumplen ambas condiciones a la vez.

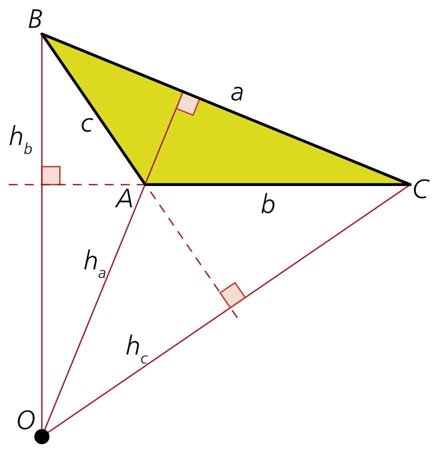
2.4. Rectas y puntos notables de un triángulo

Al estudiar triángulos hay otros dos tipos de rectas relevantes.

Las alturas de un triángulo

Un triángulo tiene 3 alturas, una por cada lado, que van desde cada vértice, perpendicularmente al lado opuesto, o a la prolongación del lado opuesto.

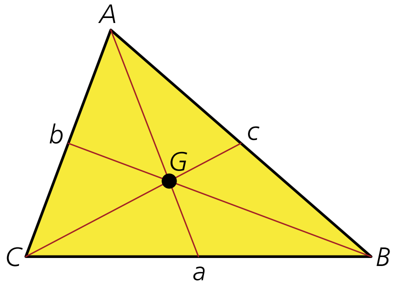




Las medianas de un triángulo

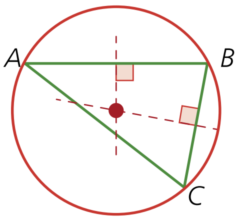
Las medianas de un triángulo son los segmentos que unen cada vértice con el punto medio del lado opuesto.

Si colocas un triángulo sobre el canto de una regla apoyándose en una mediana, verás que se mantiene en equilibrio. También si lo apoyas sobre la punta de un lápiz en el punto de corte de las tres medianas.

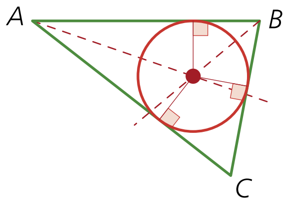


Puntos notables de un triángulo

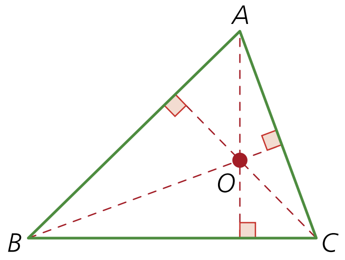
Circuncentro: punto en el que se cortan las tres **mediatrices** del triángulo.
Es el centro de la **circunferencia circunscrita**.



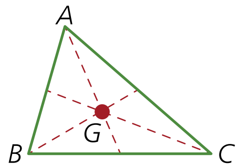
Incentro: punto en el que se cortan las tres **bisectrices** de un triángulo.
Es el centro de la **circunferencia inscrita**.



Ortocentro: punto en el que se cortan las tres **alturas** de un triángulo.



Baricentro: punto en el que se cortan las tres **medianas** de un triángulo.
Es el **centro de gravedad** del triángulo.
En una mediana, la distancia del baricentro a un vértice es el doble que la del baricentro a la recta.



La recta de Euler

El circuncentro, el baricentro y el ortocentro de un triángulo están sobre una misma recta que se llama **la recta de Euler.**

Si el triángulo es isósceles, el incentro también pertenece a esa recta.

Practica y aprende

10. Si la distancia desde el vértice de un triángulo hasta su baricentro es de 30 cm, ¿cuánto mide la distancia del baricentro a la mitad del lado opuesto a ese vértice?

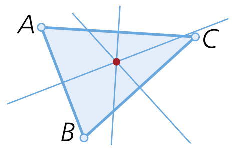
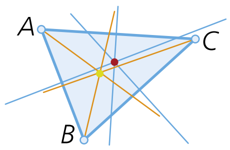
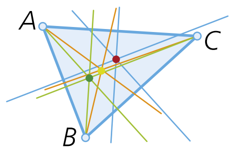
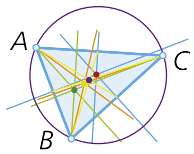
11. Dibuja un triángulo acutángulo y sus tres alturas.

12. Dibuja un triángulo obtusángulo y sus tres alturas. Verás que el ortocentro queda fuera del triángulo.

13. Dibuja un triángulo equilátero de 10 cm de lado y dibuja sobre él las rectas y puntos notables. ¿Qué puedes observar?

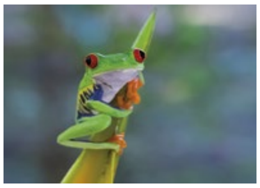
GeoGebra. Construcción de las rectas y puntos notables de un triángulo

Con la herramienta punto, , dibuja los tres vértices de un triángulo: *A, B* y *C*. Con la herramienta polígono, , dibuja el triángulo.

Con la herramienta mediatriz, , dibuja las tres mediatrices y señala con un punto donde se cruzan. Nombra a ese punto como **Circuncentro.** Dibuja la circunferencia circunscrita.	Con la herramienta bisectriz, , dibuja las bisectrices y señala con un punto donde se cruzan. Nombra a ese punto como **Incentro.** Dibuja la circunferencia inscrita.	Con la herramienta perpendicular, , dibuja las alturas. Señala con un punto donde se cruzan. Nombra a ese punto como **Ortocentro.**	Con las herramientas punto medio, , y segmento, , traza las medianas y marca el punto donde se cruzan, nombrándolo **Baricentro.**
 A B C	 A B C	 A B C	 A B C

Con la herramienta recta, , traza la recta de Euler y nómbrala **RectaEuler.**
Mueve los vértices del triángulo hasta conseguir que los cuatro puntos notables estén alineados. ¿Qué triángulo tienes?
Sigue moviendo los vértices hasta conseguir que todos los puntos notables coincidan. ¿De qué tipo de triángulo se trata?

3 Semejanza



¿Cuáles de las figuras del margen son semejantes a esta foto? ¿Por qué?

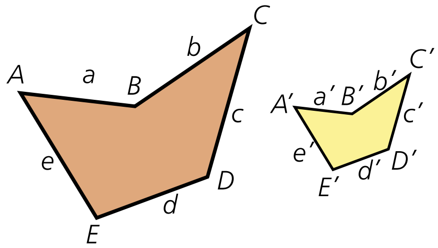
Dos **figuras** son **semejantes** si tienen la misma forma, aunque no tengan el mismo tamaño.

En las figuras semejantes las longitudes correspondientes son proporcionales y los ángulos son iguales.

3.1. Polígonos semejantes

Los **elementos homólogos,** o correspondientes, de dos figuras, son los que ocupan el mismo lugar en ambas.

Dos **polígonos** son **semejantes** si sus lados homólogos son proporcionales y sus ángulos homólogos son iguales.



Ejemplo

Los polígonos al margen son semejantes porque los lados homólogos a y a', b y b', c y c'… no son iguales pero sí proporcionales, es decir:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'}$$

Y los ángulos A, B, C, D y E son iguales a A', B', C', D' y E' respectivamente.

La **razón de semejanza,** o razón de proporcionalidad, es el número por el que se multiplica un segmento para obtener su homólogo.

Entre dos figuras, F y F', existen dos razones de semejanza:

El número por el que hay que multiplicar F para obtener F': $\frac{a'}{a} = r$.

El número por el que hay que multiplicar F' para obtener F: $\frac{a}{a'} = r'$.

Las razones de semejanza entre dos figuras semejantes son inversas:

$$r = \frac{1}{r'}$$

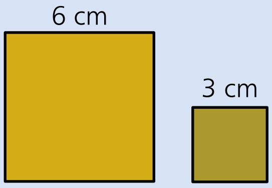
Si la razón de semejanza entre dos figuras es r, la razón de semejanza entre sus áreas es r^2.

Si son tridimensionales, la razón de semejanza entre sus volúmenes será r^3.

Practica y aprende

14. Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones. Cuando sean falsas, pon un contraejemplo:

- **a.** Todos los triángulos son semejantes.
- **b.** Todos los rectángulos son semejantes.
- **c.** Todos los cuadrados son semejantes.
- **d.** Dos polígonos que tienen la misma cantidad de lados, y además estos son proporcionales, son semejantes.
- **e.** Dos polígonos que tienen los lados proporcionales y los ángulos iguales son semejantes.



15. ¿Cuál es la razón de semejanza entre los dos cuadrados del margen? ¿Y la razón de semejanza entre sus áreas? Calcula las áreas de ambos y compruébalo. ¿Cuántos cuadrados pequeños caben dentro del grande?

16. Dos pentágonos regulares son semejantes con razón $r = 5$. Si el perímetro del menor es 15 m, ¿cuánto mide el lado del mayor?

17. Dos figuras son semejantes con una razón de semejanza de sus áreas de 9. Si un lado del menor es 1, ¿cuánto medirá su homólogo en el mayor?

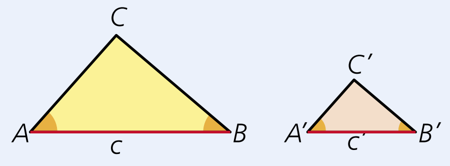
3.2. Triángulos semejantes y criterios de semejanza

Para verificar que **dos triángulos** son semejantes no es necesario medir cada uno de sus ángulos y cada uno de sus lados y compararlos. Podemos verificarlo de tres formas distintas, más sencillas:

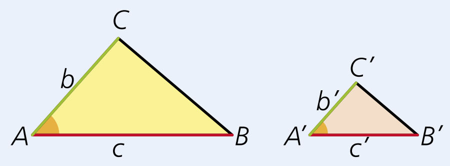
Criterios de semejanza de triángulos

Dos triángulos son semejantes si:

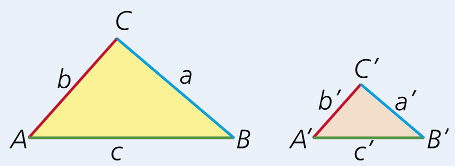
Tienen dos ángulos iguales.



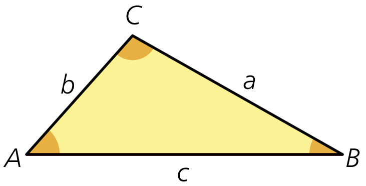
Tienen dos lados proporcionales y el ángulo que forman, igual.

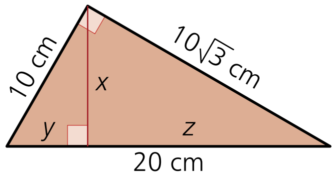


Tienen los tres lados proporcionales.



Normalmente, los triángulos se nombran por sus vértices en mayúsculas y los lados toman la misma letra que el vértice opuesto, pero en minúsculas.





Practica y aprende

18. Indica si son semejantes los siguientes triángulos:

a. Uno de ángulos de 35° y 55° y el otro de 90° y 35°.

b. Uno de lados de 3 cm, 4 cm y 5 cm y el otro de 6 cm, 10 cm y 8 cm.

c. Dos triángulos equiláteros.

d. Dos triángulos isósceles.

e. Dos triángulos rectángulos isósceles.

f. a = 15 m, b = 10 m y C = 42°; a' = 3 cm, b' = 2 cm y C' = 42°.

19. ¿Qué tiene que valer el dato que falta para que los dos triángulos, en cada caso, sean semejantes?

a. a = 28 cm, b = 10 cm y c = 22 cm; a' = 7 cm, b' = ___ cm y c' = ____ cm.

b. A = 37°, B = 83°, c = 24 km, b = 20 km; A' = ___°, B' = ___°, C' = ___°, c' = 40 km y b' = ___ km.

c. A = 30°, B = 60°, c = 24 cm, a = 12 cm; A' = ___°, B' = ___°, C' = ___°, a' = 10 cm, b' = ____ cm; c' = ___ cm.

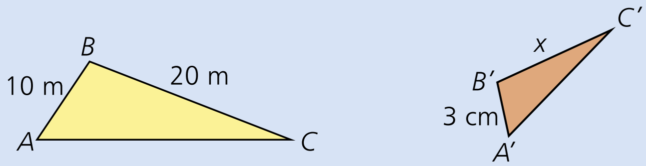
20. En el triángulo rectángulo del margen se ha trazado la altura, x, generando dos triángulos rectángulos dentro. Dibuja los tres triángulos, el original (el grande), el mediano y el pequeño y pon valor a sus lados. Demuestra que son semejantes y halla x, y y z.

21. Dibuja con regla y compás un triángulo de lados 4 cm, 5 cm y 7 cm. Dibuja luego otro triángulo semejante que tenga los lados el doble de largos.

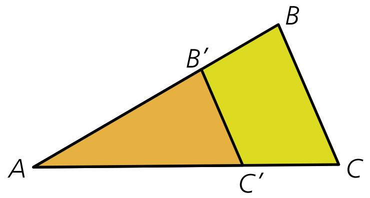
22. Dos triángulos isósceles que tienen los ángulos iguales de 43°, ¿son semejantes? Justifica tu respuesta.

23. Las longitudes de los lados de un triángulo son 4 dm, 5 dm y 7 dm. ¿Cuánto medirán los lados de otro semejante que tiene de perímetro 32 m?

24. Halla x en el triángulo semejante a ABC.



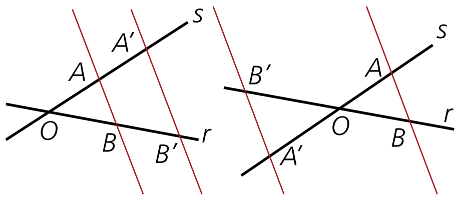
3.3. Teorema de Tales. Triángulos en posición de Tales



Se dice que **dos triángulos están en posición de Tales** si comparten un ángulo y tienen los lados opuestos a ese ángulo, paralelos.

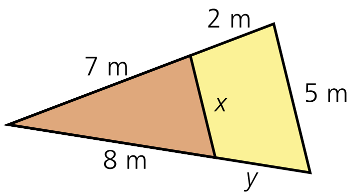
Teorema de Tales

Si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado.



Ejemplo

Halla x e y en la figura.



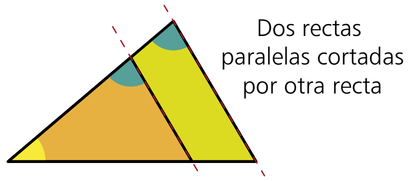
Por el teorema de Tales, el triángulo rojo y el amarillo son semejantes. Por lo tanto:

$$\frac{7}{7+2} = \frac{x}{5} \Rightarrow x = \frac{7 \cdot 5}{9} = 3{,}89 \text{ cm}$$

$$\frac{8}{8+y} = \frac{7}{7+2} \Rightarrow 8 + y = \frac{8 \cdot 9}{7} \Rightarrow y = \frac{8 \cdot 9}{7} - 8$$

Así, y es aproximadamente 2,29 cm.

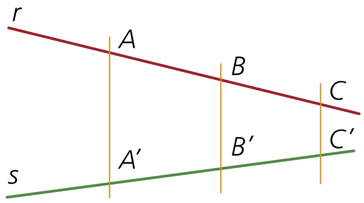
Demostración gráfica del teorema de Tales



Dos triángulos con dos ángulos iguales son semejantes.

Resultados útiles del teorema de Tales

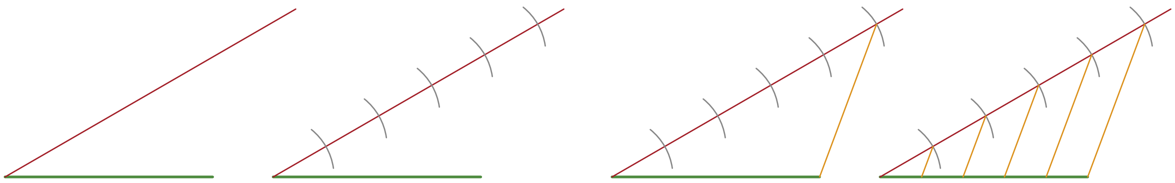
Una consecuencia del teorema de Tales es que **los segmentos formados por los cortes de rectas secantes con rectas paralelas tienen longitudes proporcionales.**

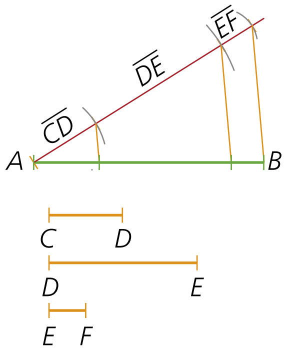


Es decir:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \; ; \; \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}} \; ; \; \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \text{ y } \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{A'C'}}$$

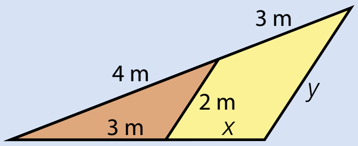
Esto es útil para dividir un segmento en partes iguales:





También para dividir un segmento en partes proporcionales a las de otro.

Practica y aprende

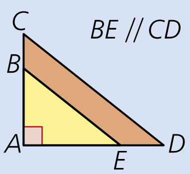


25. Halla x e y en la figura. Recuerda que el teorema de Tales se aplica a triángulos semejantes y que el resultado que hemos visto se aplica solo a los segmentos producidos por el corte de las paralelas. Explica en cada caso cuál de los dos resultados estás usando.

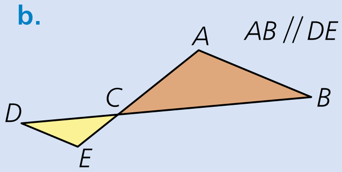
26. Un triángulo ABC de lados $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{BC} = 4$ cm y $\overline{CA} = 6$ cm, está en posición de Tales con otro AEF cuyo perímetro mide 85 cm. ¿Cuánto miden los lados del triángulo AEF?

27. Identifica el par de triángulos semejantes que hay en cada figura y justifica por qué lo son.

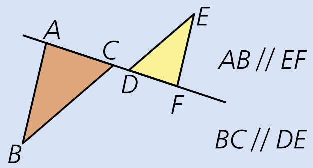
a.



b.

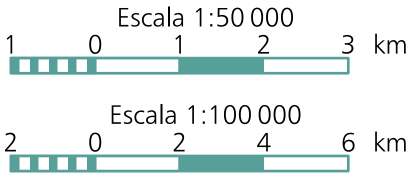


c.



Barras de escala

Son representaciones visuales de la escala de un mapa.



Observa

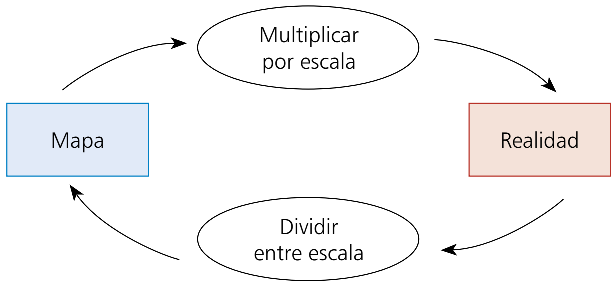
La escala no tiene unidades. Si mides en centímetros y multiplicas por la escala obtienes centímetros. Si mides en kilómetros obtendrás kilómetros.

4 Mapas y planos, escalas

Los mapas y planos son un uso específico de la semejanza.

La razón de semejanza, r, entre la realidad y el mapa, o el plano, se llama **escala** y se escribe $1:r$.

Para encontrar la distancia real entre dos lugares representados en un plano, o mapa, se mide la distancia en el plano, o mapa, y se multiplica por la escala, r. Para pasar de la medida real a la representada, se divide entre la escala.



En el caso de querer hallar un área, se multiplica o se divide por la escala al cuadrado, r^2. Y si es un volumen, por la escala al cubo, r^3.

Ejemplo

La distancia entre dos ciudades, medida en un mapa de escala 1:25 000, es de 25 cm. ¿Cuántos kilómetros hay, realmente, entre esas dos ciudades? Haz un dibujo de una barra de escala en la que aparezcan señalados 500 m y 1 km.

Para encontrar la distancia real se multiplica: 25 cm · 25 000 = 625 000 cm.

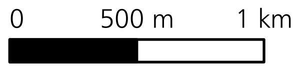
Se pasa de cm a km: 625 000 cm = 6,25 km es la distancia real.

Para hacer el dibujo de la barra de escala, tengo que hallar cuánto medirían en el mapa 500 m y 1 km; luego lo pondremos en centímetros por comodidad:

500 m / 25 000 = 0,02 m = 2 cm

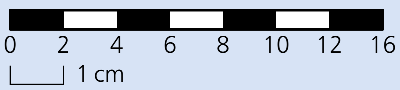
1 km / 25 000 = 0,00004 km = 4 cm

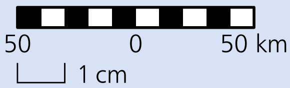
Dibujamos una barra de 4 cm en la que marcamos 1 km, y en los 2 cm los 500 m.



Practica y aprende

28. Encuentra en cada caso cuál es la distancia que representa 1 cm en cada una de las barras de escala.

a. 

b. 

29. En un mapa, cuya escala es 1:500 000, tres ciudades están en los vértices de un triángulo equilátero. La distancia entre dos de ellas es de 12 cm.

a. ¿Cuál es la distancia real a la que se encuentran?

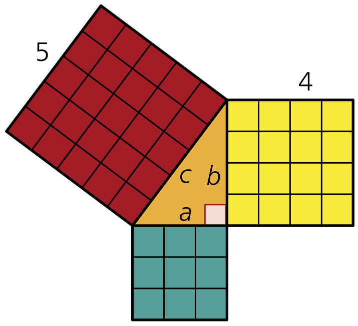
b. ¿Cuál es el área real que abarcan?

c. Dibuja una barra de escala en la que aparezcan 5 km, 10 km y 25 km.

30. ¿Qué dos ciudades están a más distancia, las que están a 10 cm en un mapa a escala 1:25 000 o en un mapa a escala 1:50 000?

31. El área de una habitación en un plano de escala 1:50 es de 48 cm^2. ¿Cuántos metros cuadrados tiene la habitación? Dibuja una barra de escala para el plano en la que aparezcan 1 m y 2 m.

5 Longitudes y áreas

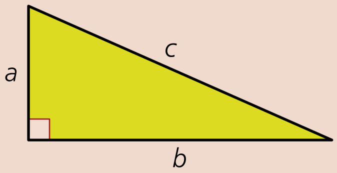


Para hallar áreas de polígonos, prácticamente basta con saber hallar longitudes y áreas de rectángulos y triángulos. Para estos últimos es imprescindible saber utilizar el teorema de Pitágoras.

5.1. Teorema de Pitágoras

En un triángulo rectángulo la suma del cuadrado de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

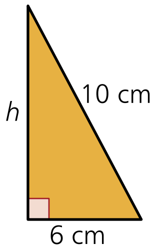


Catetos: lados que forman el ángulo recto en un triángulo rectángulo.

Hipotenusa: lado opuesto al ángulo recto.

Ejemplo

Halla el área de un triángulo rectángulo que tiene 10 cm de hipotenusa y uno de sus catetos mide 6 cm.



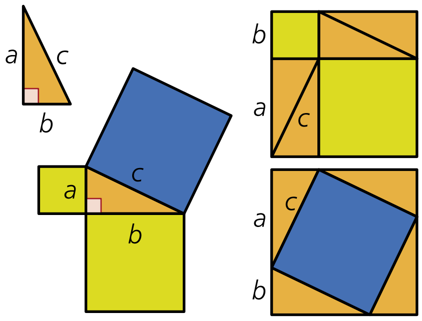
Como es un triángulo rectángulo, podemos usar el teorema de Pitágoras.

$$h^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h^2 = 10^2 - 6^2 \Rightarrow h = \pm\sqrt{100-36} \Rightarrow h = \pm\sqrt{64} = \pm 8$$

Como la hipotenusa no puede ser negativa, el resultado –8 no tiene sentido. Por lo tanto, $h = 8$ cm.

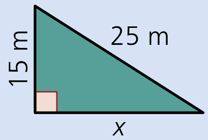
El área es: $\dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{6 \cdot 8}{2} = 24\ \text{cm}^2$



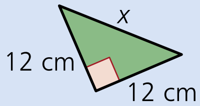
Practica y aprende

32. Halla el lado que no se conoce en los siguientes triángulos rectángulos. Identifica primero cuáles son los catetos y cuál la hipotenusa.

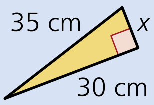
a.



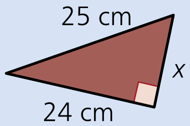
b.



c.



d.

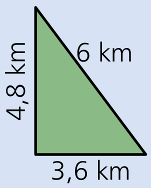


33. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles de lado 10 cm.

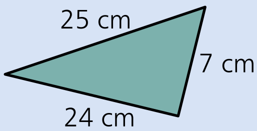
34. Halla la altura de un triángulo equilátero de lado 4 cm.

35. Utiliza el teorema de Pitágoras para comprobar cuáles de los siguientes triángulos son rectángulos:

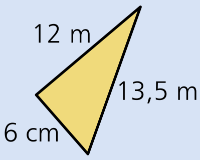
a.



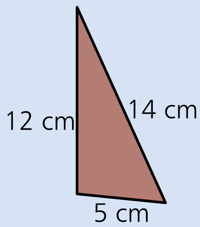
b.

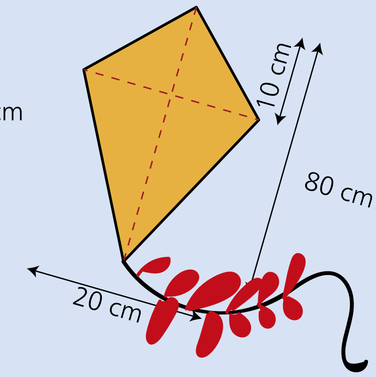


c.

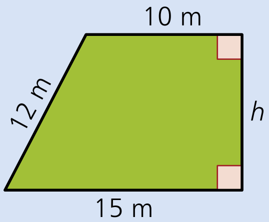


d.



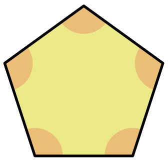


36. Halla el perímetro de la cometa.

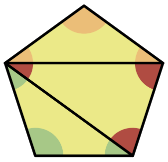


37. ¿Cuánto mide la altura del trapecio?

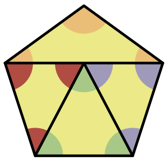
Ángulos interiores



Partición correcta



Partición incorrecta



5.2. Suma de los ángulos de un polígono

Ya hemos visto que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º.

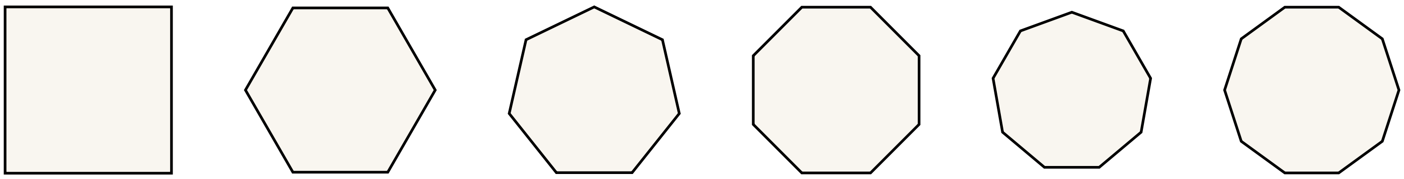
Para hallar la suma de los ángulos interiores de un polígono cualquiera, este se divide en triángulos que tengan sus vértices en los vértices del polígono. De esta forma, la suma de los ángulos de los triángulos es igual a la de los ángulos del polígono.

Se quiere hallar la suma de los ángulos dibujados en morado, es decir, la de los **ángulos interiores** del pentágono. Como ves en el margen, hay particiones correctas para conseguir la suma y particiones incorrectas.

Como el pentágono se ha dividido en tres triángulos, la suma de los ángulos será $3 \cdot 180º = 540º$. Al ser un polígono regular, cada uno de los ángulos interiores medirá $\frac{540°}{5} = 108°$.

Investiga

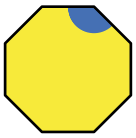
Halla la suma de los ángulos interiores de los siguientes polígonos. Para ello, divide los polígonos en triángulos, teniendo cuidado de hacer particiones correctas. Luego, completa la tabla.



Lados del polígono	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	***n***
Número de triángulos	1		3						
Suma de los ángulos interiores	180º		540º						
Ángulo interno	180º/3 = 60º		540º/5 = 108º						

Polígono convexo

Tiene sus ángulos internos menores de 180º.



Polígono cóncavo

Tiene algún ángulo interno mayor de 180º

La **suma de los ángulos interiores de un polígono** convexo de n lados es:

$$S = 180º \cdot (n - 2)$$

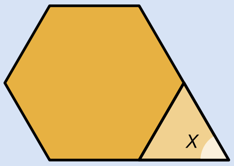
El **ángulo interior de los polígonos regulares** de n lados es:

$$\alpha = \frac{180 \cdot (n-2)}{n}$$

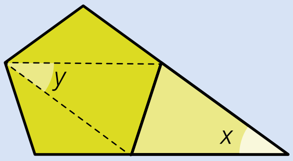
Practica y aprende

38. Halla los ángulos que faltan en las figuras:

a.



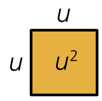
b.

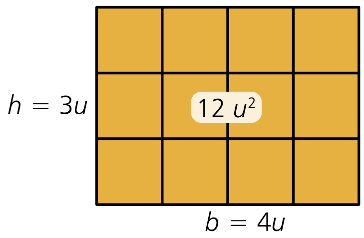


39. Utiliza los ángulos interiores para demostrar que un hexágono regular tiene el lado igual a la distancia del centro a un vértice, es decir, igual al radio.

5.3. Áreas de polígonos

El área se mide en unidades cuadradas. La expresión depende de la unidad que utilices: si usas metros, tendrás metros cuadrados, si usas centímetros, centímetros cuadrados...





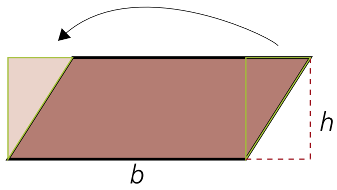
El **área de un rectángulo** de base *b* y altura *h* es:

$$A = b \cdot h$$

El área de un cuadrado de lado *l será*, por tanto:

$$A = l^2$$

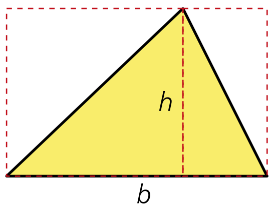
Para calcular el área de un romboide, al ser un paralelogramo, se puede recolocar el triángulo de una esquina en la otra, formando un rectángulo de base la que tenía y misma altura.



El **área de un romboide** de base *b* y altura *h* es igual que la del rectángulo:

$$A = b \cdot h$$

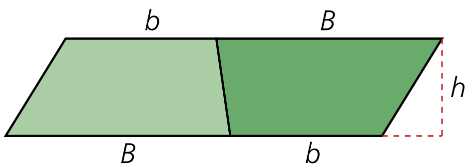
Para hallar la fórmula del área de un triángulo, observa que se puede dividir en dos triángulos rectángulos.



El **área de un triángulo** de base *b* y altura *h* es:

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Para hallar el área de un trapecio, podemos colocar dos de ellos unidos para crear un romboide y dividir el área del resultado entre dos.

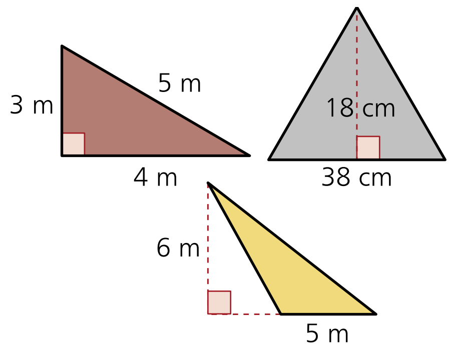


El **área de un trapecio** de base mayor *B* y base menor *b* es:

$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

Practica y aprende

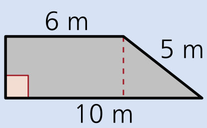
40. Calcula el área de los triángulos del margen.



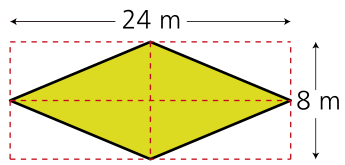
41. El área de un rectángulo es de 25 m^2. Si la base mide 10 m, ¿cuánto mide su altura?

42. Calcula el área de un romboide de base 27 mm y altura 1 cm.

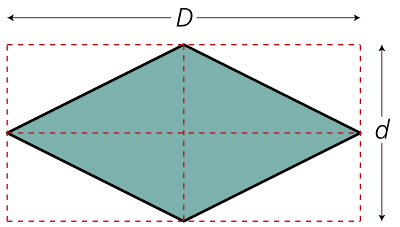
43. Calcula el área del trapecio.



44. Calcula el área y el perímetro del rombo del margen teniendo en cuenta que sus diagonales se cortan en el centro y lo hacen en ángulo recto.



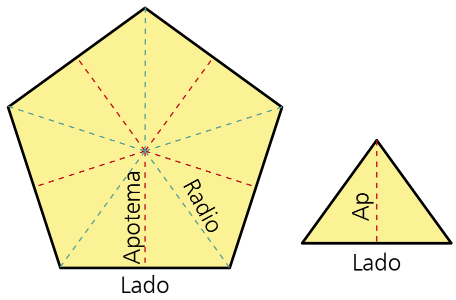
45. Se quieren poner azulejos en las paredes de un cuarto de baño que tiene el suelo rectangular de ancho 2 m y de largo 3 m y una altura de 3 m. Si los azulejos son cuadrados de 1 dm de lado y la caja de 10 cuesta 5 €. ¿Cuánto van a costar los azulejos?



Para hallar el área de un rombo, contamos dos veces los triángulos en los que lo dividen las diagonales, obteniendo un rectángulo de base D y altura d. El área será la mitad.

El **área de un rombo** de diagonal mayor D y diagonal menor d es:

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$



Polígonos regulares

Las apotemas de un polígono regular son los segmentos que unen el centro del polígono con el centro de los lados.

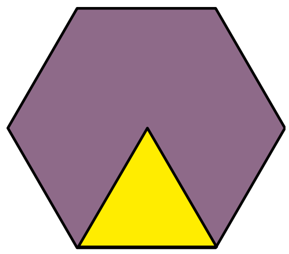
Los polígonos regulares de n lados se pueden dividir en n triángulos isósceles de base el lado y altura la apotema.

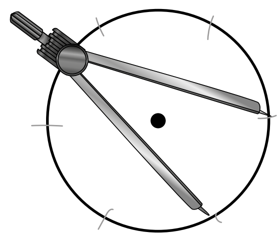
El **área de un polígono regular** de n lados es:

$$A = n \cdot \frac{l \cdot apotema}{2} = \frac{n \cdot l \cdot apotema}{2} = \frac{perímetro \cdot apotema}{2}$$

Investiga

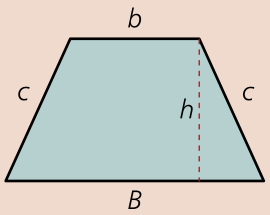
- Halla cuánto vale el ángulo interior de un **hexágono regular.**
- Dibuja el hexágono con su apotema y los 6 triángulos que se forman con los radios.
- Dibuja uno de los triángulos por separado y pon cuánto valen sus ángulos interiores. ¿Qué tipo de triángulo es? Si el lado del hexágono mide 8 cm, ¿cuánto medirá el radio?
- Teniendo en cuenta lo que acabas de hallar, dibuja una circunferencia y, con la apertura del radio, ve marcando arcos.
- Une las marcas que has dibujado y observa qué sale.





Recuerda

Un **trapecio isósceles** tiene sus lados no paralelos, iguales.



Practica y aprende

46. Calcula el área de un hexágono regular de lado 8 dm.

47. Calcula la apotema de un hexágono de lado 2.

48. Calcula el área y el perímetro de un trapecio isósceles de 10 cm de base menor, 18 cm de base mayor y 5 cm de lados laterales iguales.

49. Halla el área de un octógono regular de lado 7 m y apotema 8,4 m.

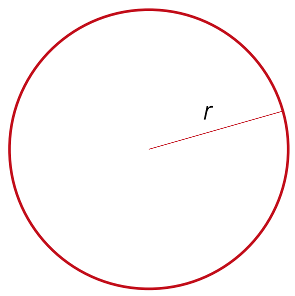
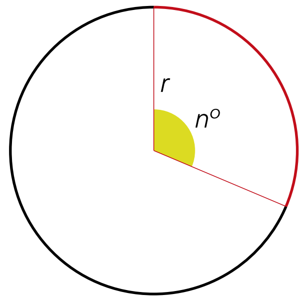
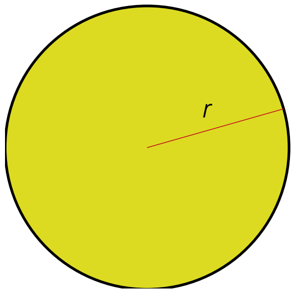
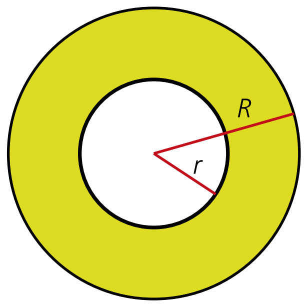
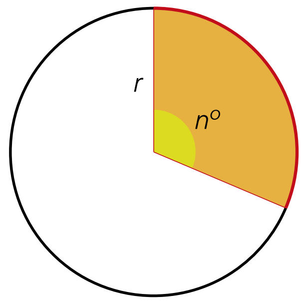
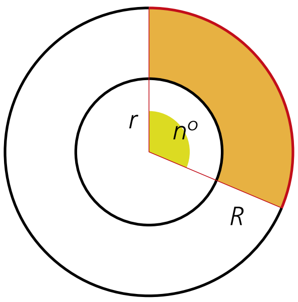
50. Si el área de un pentágono regular es 43 m^2 y su apotema mide 3,4 m, ¿cuánto mide el lado del pentágono?

51. Un heptágono de lado 10 m tiene una apotema de 10,4 m.

a. ¿Cuál es su área?

b. ¿Cuál es su perímetro?

5.4. Áreas y perímetros de figuras circulares

Longitud de la circunferencia	Longitud de arco de circunferencia	Área del círculo
		
$L = 2\pi r$	$L = 2\pi r \dfrac{n^\circ}{360^\circ}$	$A = \pi r^2$
Área de la corona circular	**Área del sector circular**	**Área del trapecio circular**
		
$A = \pi (R^2 - r^2)$	$A = \pi r^2 \dfrac{n^\circ}{360^\circ}$	$A = \pi (R^2 - r^2) \dfrac{n^\circ}{360^\circ}$

Ejemplo

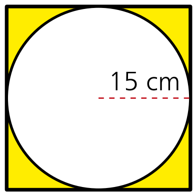
Halla el área de la figura sombreada del margen.

Para calcularla es necesario hallar el área del círculo de radio 15 cm y la del cuadrado de lado 30 cm y restarlas.

Área del círculo: $A_{\text{círculo}} = \pi \cdot 15^2 = \pi \cdot 225 = 706{,}86\ \text{cm}^2$

Área del cuadrado: $A_{\text{cuadrado}} = 30^2 = 900\ \text{cm}^2$

$A_{\text{cuadrado}} - A_{\text{círculo}} = 900 - 706{,}86 = 193{,}14\ \text{cm}^2$



Usar π en la calculadora

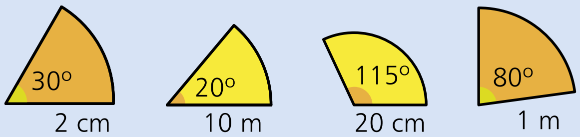
Para pulsar π en la calculadora hace falta pulsar primero Shift:

Así, para hallar $\pi \cdot 15^2$:

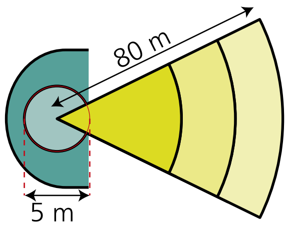
Practica y aprende

52. Halla el área y el perímetro de medio círculo de radio 13 mm.

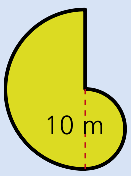
53. [2] Halla el área de los siguientes sectores circulares:



54. [3] El campo de lanzamiento de disco es un trapecio circular de 40° y de radio menor 2,5 m y radio mayor 80 m. ¿Cuál es el área del césped del campo? ¿Cuál sería el perímetro?

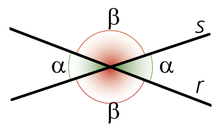
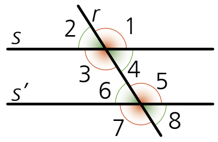
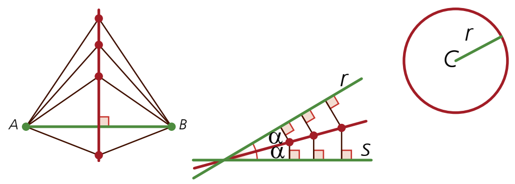
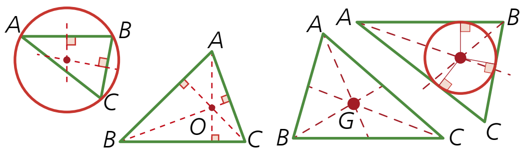
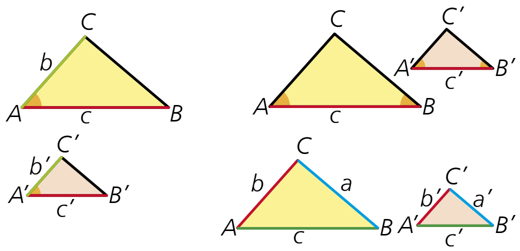
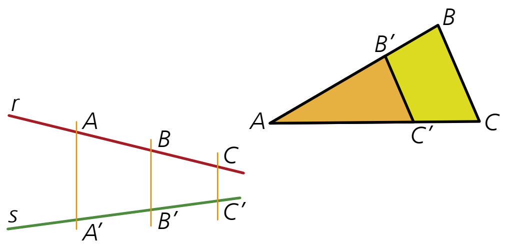
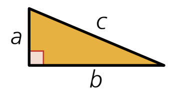
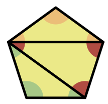


55. [3] Halla el área y el perímetro de la figura.

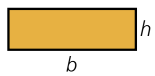
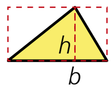
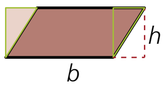
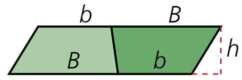
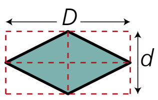
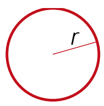
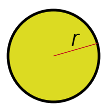


Para recordar

GEOMETRÍA DEL PLANO

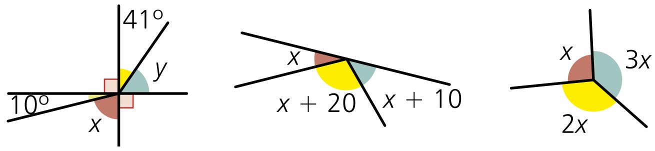
Ángulos formados por rectas que se cortan	Ángulos opuestos por el vértice: los ángulos opuestos por el vértice son iguales.	
	Rectas paralelas cortadas por una secante: ❖ Los ángulos alternos internos 4 y 6, 3 y 5 son iguales. ❖ Los ángulos alternos externos 1 y 7, 8 y 2 son iguales. ❖ Los ángulos correspondientes 2 y 6, 3 y 7, 1 y 5, 4 y 8 son iguales.	
Lugares geométricos	La circunferencia: lugar geométrico del plano de los puntos que distan r de un punto C al que se llama centro. La mediatriz: lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos de un segmento. La bisectriz: lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los dos segmentos que forman un ángulo.	
Rectas y puntos notables de un triángulo	Punto de corte de las mediatrices: circuncentro. Punto de corte de las bisectrices: incentro. Punto de corte de las alturas: ortocentro. Punto de corte de las medianas: baricentro.	
Semejanza	Dos figuras son semejantes si tienen sus lados homólogos proporcionales y sus ángulos iguales.	
	Criterios de semejanza de triángulos: ❖ Tienen dos ángulos iguales. ❖ Tienen un ángulo igual y los lados que lo forman, proporcionales. ❖ Tienen todos sus lados proporcionales.	
	Teorema de Tales: si en un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtiene un triángulo que es semejante al triángulo dado. Resultado: los segmentos formados por los cortes por dos rectas secantes en rectas paralelas tienen longitudes proporcionales. Es decir: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C'}$; $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{A'B'}{B'C'}$ y $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{B'C'}{A'C'}$	
Teorema de Pitágoras	$a^2 + b^2 = c^2$	
Polígonos	Suma de los ángulos interiores: $S = 180^\circ \cdot (n - 2)$	
	Ángulo interior de un polígono de n lados: $\alpha = \dfrac{180 \cdot (n-2)}{n}$	

Áreas

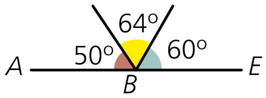
Rectángulo	Triángulo	Romboide	Trapecio
			
$A = b \cdot h$	$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$	$A = b \cdot h$	$A = \dfrac{(B+b) \cdot h}{2}$
Rombo	**Polígono regular**	**Circunferencia**	**Círculo**
			
$A = \dfrac{D \cdot d}{2}$	$A = \dfrac{perímetro \cdot apotema}{2}$	$P = 2\pi r$	$A = \pi r^2$

Ángulos

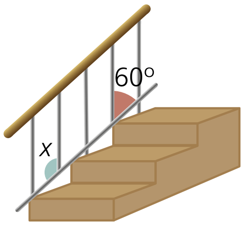
1. Halla *x* e *y* justificando tu respuesta.



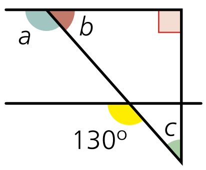
2. Da una razón por la que *AE* no puede ser un segmento recto.



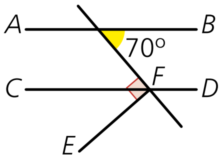
3. Calcula el ángulo que forma la barandilla.



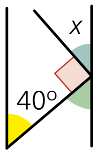
4. Halla *a*, *b* y *c*.



5. Halla el ángulo *CFE*.



6. Halla *x*.



Lugares geométricos

7. Un tesoro está enterrado a 70 m de una estatua y a 80 m de la puerta de un parque. La estatua está a 100 m de la puerta. Dibuja los posibles lugares en los que puede estar enterrado el tesoro.

8. Dibuja el lugar geométrico de los puntos que están a 5 cm de un punto *A*. ¿Es un punto, una línea o un superficie?

9. Halla el área del lugar geométrico de los puntos del plano que están a más de 3 dm de un punto *A*, pero a menos de 5 dm de ese punto.

10. Si dibujas las bisectrices de un polígono no regular, ¿se cortan en un punto? Puedes comprobarlo con GeoGebra.

11. Un bebé está en un parque rectangular de 3 m por 2 m y sacando el brazo por la verja alcanza 50 cm. Dibuja el parque y la zona que alcanza el bebé.

Rectas y puntos notables de un triángulo

12. Di si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, y explica por qué las falsas lo son:

- **a.** El circuncentro es el centro de gravedad del triángulo.
- **b.** El ortocentro siempre está dentro del triángulo.
- **c.** El baricentro siempre está dentro del triángulo.
- **d.** Si un triángulo es rectángulo su ortocentro es el vértice de ángulo recto.
- **e.** El incentro de un triángulo es el centro de la circunferencia circunscrita.

13. ¿Cómo se halla el centro de gravedad de un triángulo cualquiera?

14. Completa las frases:

- **a.** Solo en el caso de un triángulo isósceles, la recta de Euler pasa por su __.
- **b.** En un triángulo equilátero, el circuncentro, el incentro, el ortocentro y el baricentro __.
- **c.** Las alturas de un triángulo se cortan en el __.
- **d.** En una mediana, la distancia del baricentro al vértice es __ veces la distancia del baricentro a la mitad del lado opuesto.
- **e.** Las bisectrices de un triángulo se cortan en el __.

15. Si el radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo equilátero es de 10 cm, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia inscrita?

Semejanza

16. Indica si son semejantes los siguientes pares de triángulos.

- **a.** Uno con un ángulo de 30º y otro de 72º y el otro con un ángulo de 78º y otro de 72º.
- **b.** Un triángulo rectángulo con un ángulo de 30º y otro triángulo rectángulo con un ángulo de 60º.
- **c.** Un triángulo isósceles con el ángulo desigual de 70º y otro triángulo isósceles con ángulos iguales de 55º.

d. $a = 12$ cm, $b = 9$ cm y $c = 6$ cm; $a' = 8$ m, $b' = 6$ m y $c' = 4$ m.

e. Uno de ángulos 30º y 40º y otro de ángulos 15º y 20º.

17. Calcula el valor que falta para que los siguientes pares de triángulos sean semejantes:

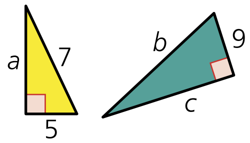
a. $a = 12$ cm, $b = 16$ cm y $c = 20$ cm; $a' = 9$ m, $b' =$ __ m y $c' =$ __ m.

b. $A = 35º$, $B = 40º$ y $A' = 35º$, $C' =$ __.

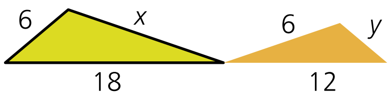
c. $a = 7$ m, $b = 5$ m y $C = 20º$; $a' = 21$ m, $b' =$ __ m y $C' =$ __º.

18. Halla los lados que faltan en cada uno de los pares de triángulos semejantes:

a.



b.

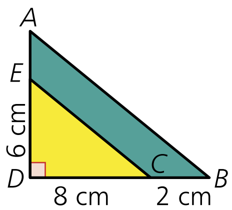


19. Un árbol proyecta una sombra de 15 m. Al mismo tiempo, Laura, que mide 1,60 m, proyecta una sombra de 8 m. ¿Cuánto mide el árbol?

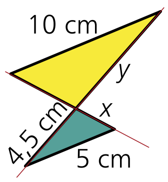
20. [1] Dos figuras son semejantes con razón de semejanza 3. Si la menor tiene un perímetro de 20 m, ¿qué perímetro tiene la mayor? Y si el área de la primera es 9 m^2, ¿cuál será el área de la segunda?

Teorema de Tales

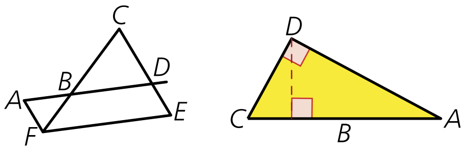
21. [2] Halla *AE, CE* y *AB.*



22. Halla *x* e *y* sabiendo que los lados de 10 y 5 cm son paralelos.



23. Identifica 3 triángulos semejantes de cada figura y justifica por qué lo son.



24. Utiliza el teorema de Tales para dibujar en la recta real las fracciones $\frac{3}{7}$ y $\frac{7}{5}$.

25. Utiliza el teorema de Tales para dividir un segmento de 10 cm en 3 trozos, el primero el doble que el segundo y el tercero tres veces el primero.

Mapas y planos

26. En un mapa, la distancia entre dos ciudades es 15 cm; si en realidad están a 60 km, ¿cuál es la escala del mapa?

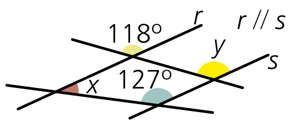
27. En un plano, un edificio tiene de ancho 10 cm y de largo 20 cm. Si la escala es 1:200, ¿cuáles son las dimensiones reales del edificio?

28. Si queremos hacer un plano de una casa de base cuadrada de 50 m de lado y que en el plano sea un cuadrado de 50 cm de lado, ¿cuál será la escala del plano? Dibuja una barra de escalas en la que aparezcan 1 m y 5 m.

29. [1] ¿Cuál es el área real de una habitación que en un plano de escala 1:200 tiene unas dimensiones de 3 cm por 5 cm?

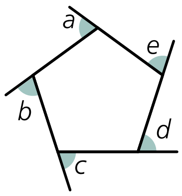
Sumas de ángulos

30. [4] Si las rectas *r* y *s* son paralelas, ¿cuánto valen *x* e *y*?



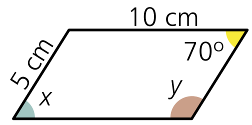
31. Los ángulos interiores de un polígono regular miden 108º, ¿qué polígono es?

32. Calcula la suma de *a, b, c, d* y *e.*



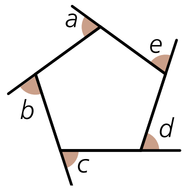
Para practicar

33. Halla *x* e *y* en el siguiente paralelogramo.

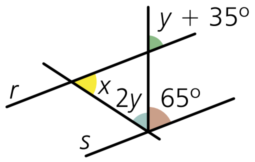


34. Calcula el ángulo interior de un dodecágono regular.

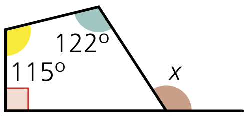
35. Demuestra matemáticamente por qué la suma de los ángulos exteriores del pentágono es 360º. ¿Y de otro polígono?



36. Halla *x* e *y*, teniendo en cuenta que *r* y *s* son paralelas.



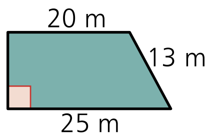
37. Halla *x*.



Longitudes y áreas

38. Calcula el área de un rombo de 5 cm de lado cuya diagonal mayor mide 8 cm.

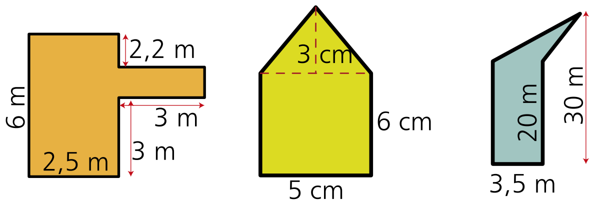
39. ¿Cuánto mide el área del siguiente trapecio rectangular?



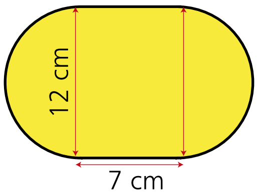
40. Calcula el área de un hexágono regular de 20 cm de lado. Recuerda que el hexágono regular está formado por seis triángulos equiláteros.

41. El área de un decágono regular de lado 10 cm es 77 cm^2, ¿cuánto mide su apotema?

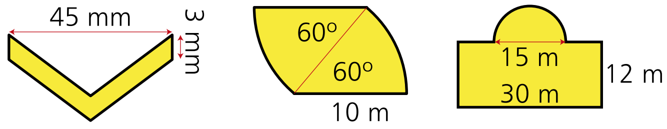
42. Halla el área de las siguientes formas:



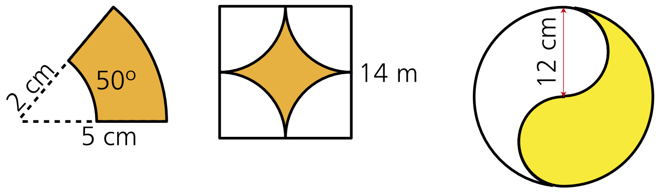
43. Halla el área de la siguiente figura:



44. Halla el área de las siguientes figuras:

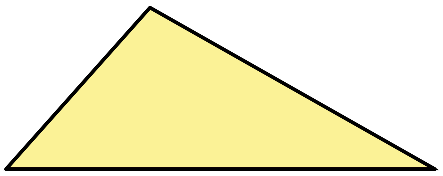


45. Halla el área de las figuras coloreadas:



Situación de aprendizaje

46. ¿Cómo colgamos los triángulos?



Para ordenar la clase en el día de la geometría vamos a colgar del techo triángulos, cuadrados y círculos. La idea es sujetarlos con un hilo y que queden perfectamente horizontales.

a. ¿Cómo determinaremos el punto en el que sujetar con el hilo en el caso de los cuadrados?

b. ¿Y de los círculos?

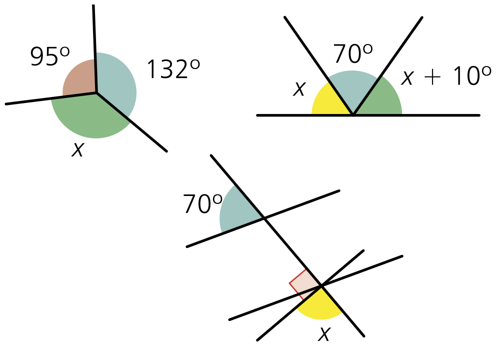
c. El caso de los triángulos parece ser más complicado porque tienen varios puntos conocidos importantes, ¿podrías enumerarlos?

d. Por parejas, recortad un triángulo de cartón como el de la imagen y dibujadle sus puntos notables. Seguidamente probad a colgarlo desde cada uno de ellos para comprobar si se mantiene horizontal en alguno de ellos.

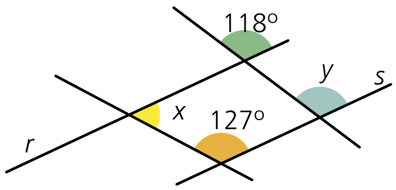
e. A la vista de lo anterior, ¿a qué punto del triángulo crees que se le puede llamar centroide o centro de gravedad del triángulo?

Autoevaluación

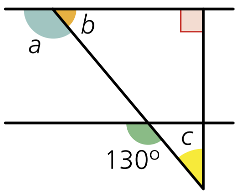
1. Halla x en cada caso:



2. Calcula el valor de x e y teniendo en cuenta que r es paralela a s. Justifica la respuesta.



3. Halla a, b y c en la siguiente figura. Justifica tu respuesta.



4. Dibuja un triángulo cuyos lados sean 6 cm, 8 cm y 10 cm.

5. Dibuja un triángulo rectángulo que tenga un cateto de 9 cm y que sea isósceles. ¿Cuánto miden sus ángulos?

6. Dibuja un segmento de 6 cm y marca los puntos de sus extremos como A y B. Dibuja el lugar geométrico de los puntos que distan 7 cm de A y 9 cm de B.

7. En un triángulo equilátero:

a. Dibuja el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los vértices. ¿Cómo se llama ese punto?

b. Si mides la distancia de ese punto a uno de sus lados y la comparas con la distancia del punto al vértice opuesto, ¿qué relación existe entre ambas medidas?

8. Dibuja un triángulo escaleno. Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los lados. ¿Cómo se llama ese punto?

9. ¿Qué tiene que valer el dato que falta para que los dos triángulos, en cada caso, sean semejantes?

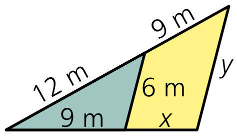
a. $a = 6$ m, $b = 10$ m y $c = 14$ m; $a' = 9$ m, $b' =$ __ m y $c' =$ __ m.

b. $A = 46°$, $c = 14$ km y $b = 18$ km; $A' =$ __°, $c' = 35$ km y $b' =$ __ km.

c. $A = 30°$, $B = 60°$, $a = 8$ mm y $c = 10$ mm; $A' =$ __°, $B' =$ __°, $C' =$ __°, $a' = 12$ mm, $b' =$ __ mm y $c' =$ ___ mm.

10. A cierta hora del día la sombra de una torre mide 30 m. Si Ara, que mide 160 cm, tiene una sombra de 2,4 m, ¿cuánto mide la torre?

11. Halla x e y en la siguiente figura y justifica tu respuesta.



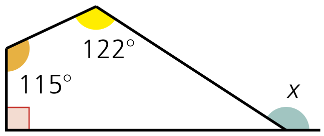
12. Dos ciudades están a 15 cm en un mapa de escala 1:25 000.

a. ¿A cuántos kilómetros están realmente?

b. Si hay un estanque de 20 cm^2 en el mapa, ¿cuántos metros cuadrados tendrá en realidad?

c. Dibuja una barra de escala en la que aparezcan 500 m y 1 km.

13. ¿Cuánto vale x en la siguiente figura?

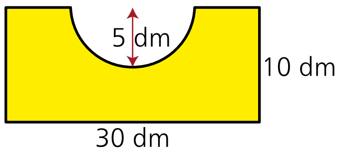


14. Halla el área de un triángulo rectángulo de base 3 dm e hipotenusa 5 dm.

15. Halla el área de un trapecio isósceles de base mayor 40 hm, base menor 30 hm y lados iguales 13 hm.

16. Halla el área de un hexágono regular de lado 2 cm.

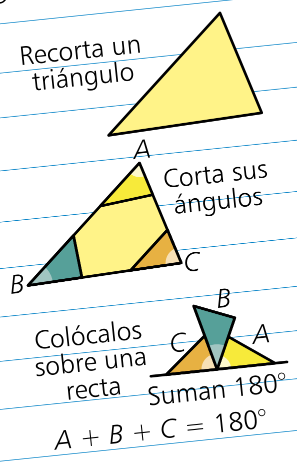
17. Halla el área de la siguiente figura:



18. Halla el área del lugar geométrico de los puntos del plano que están a más de 3 cm de un punto C, pero a menos de 7 cm del mismo punto.

Proyecto de construcción

Demostración con papel de que la suma de los ángulos de un triángulo mide 180°.



Proyecto

Demostrar que, de los polígonos regulares que cubren el plano, el que menor perímetro tiene con respecto al área que cubre es el hexágono.

¿Qué polígonos regulares cubren el plano?

Dibuja en GeoGebra o en papel seis triángulos equiláteros.

Utiliza la herramienta segmento de longitud dada, , y crea uno de 5.

Con la herramienta de polígono regular, , dibuja un triángulo pinchando en los dos puntos del segmento, es decir, un triángulo equilátero de lado 5.

Con la herramienta elije y mueve, , selecciona el triángulo y duplícalo, haz varias veces eso hasta que tengas 6 triángulos. Únelos por sus vértices formando un hexágono y comprueba que encajan y no dejan ningún hueco.

¿Cuánto mide el ángulo interno de un triángulo equilátero? ¿Cuánto suman los 6 triángulos en el vértice? ¿Te dice algo esta medida?

Repite el mismo proceso, pero crea un cuadrado, luego un pentágono, después, un hexágono y un heptágono.

Copia la siguiente tabla y realiza la actividad en tu cuaderno.

Lados del polígono regular	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Valor del ángulo interior	…	…	…	…	…	…
¿Cuántos ángulos se pueden juntar en un vértice?	…	…	…	…	…	…
¿Cuánto suman los ángulos que se juntan en un vértice?	…	…	…	…	…	…

De los polígonos regulares que cubren el plano, ¿cuál tiene menor perímetro para la misma área?

Haz una lista con los polígonos que llenan el plano y no dejan hueco.

¿Cuánto vale el perímetro de los triángulos equiláteros que tienen área 10 cm^2?

¿Cuánto vale el perímetro de los cuadrados que tienen área 10 cm^2?

¿Cuánto vale el perímetro de los hexágonos que tienen área 10 cm^2? Recuerda que se pueden dividir en 6 triángulos equiláteros.

¿Cuál tiene menos perímetro para la misma área?

Observa un panal y escribe cuál es la razón por la que las celdas del panal son hexagonales. ¿Qué otros polígonos regulares podrían haber usado las abejas? ¿Por qué crees que utilizan hexágonos en vez de los otros polígonos?