

Nuestro proyecto

Este libro está pensado desde una visión integral del aprendizaje de las matemáticas, poniendo al estudiante como artífice del mismo. La asimilación de los saberes se produce a través de la experiencia y lo lúdico, y abordándolos de múltiples formas, pues cada persona tiene una manera distinta de aprender. Asimismo, se tiene en cuenta que el aprendizaje se potencia cuando se comparte, se hace en equipo, se comunica. Actualmente, las tecnologías de la información brindan una oportunidad que no puede desdeñarse, aportan información que hay que aprender a destilar, incluyen aplicaciones para poner en práctica y experimentar lo aprendido, ofrecen múltiples opciones de comunicar, terminando, así, de redondear un proceso de investigación y comunicación que fomente la autonomía y abra la puerta al futuro profesional que debería posibilitar la etapa educativa.

Por otra parte, un libro de texto tiene que ser una herramienta para el docente y ofrecer variedad de material para trabajar distintos conceptos y a diferentes niveles, abordando las competencias básicas, dando oportunidad de ampliación y refuerzo para atender a la diversidad de la clase, aportando actividades flexibles: lúdicas, de investigación, individuales y cooperativas, manipulativas y algorítmicas, conceptuales y reflexivas. También debe ser una guía a la que el alumnado pueda acudir y permitirle una gestión independiente de su aprendizaje.

UNIDAD 9 Figuras planas elementales

En esta unidad aprenderás a...

- Definir y reconocer polígonos y sus principales elementos.
- Clasificar los distintos tipos de polígonos entendiendo el número de lados, ángulos, etc.
- Construir con regla, compás y transportador de ángulos un triángulo, conociendo algunos de los lados y ángulos del mismo.
- Principales características de la circunferencia y el círculo.

A grandes rasgos, podemos definir un mosaico como un recubrimiento del plano utilizando figuras de manera que no se solapen ni quede ningún hueco entre ellas. Cada una de estas figuras son denominadas teselas. Existen numerosas maneras de crear un mosaico, las más sencillas están formadas por la unión de polígonos regulares. A partir de ellos, gracias a transformaciones: conos, simetrías y traslaciones podemos telear un plano con las más ingeniosas figuras. No hay más que ver la obra del artista holandés Maurits Cornelis Escher, que dibujó sorprendentes figuras que encajaban entre sí formando bellas mosaicos.

A lo largo de la historia nos encontramos con multitud de culturas que emplearon la geometría para crear mosaicos con distintos fines: intelectual en Grecia, decorativo en Roma, religioso en el mundo islámico... consiguiendo con ello verdaderas maravillas.

Responde

- ¿Qué figura geométrica está formada por todos los puntos que distan 3 cm de uno dado?
- ¿Qué nombre recibe el cuadrilátero que es un polígono regular?
- Escribe todas las características que conozcas de los siguientes polígonos:

¿Cuánto mide el ángulo α de la figura? (Concurso de Primavera XVII, 2014, Nivel 2).

Las dos páginas iniciales de cada unidad presentan los objetivos que pretenden alcanzarse, un breve texto introductorio en el que se ubicarán algunos de los conceptos que deberán abordarse y unas cuestiones que permiten aplicarlos al tiempo que se ejercitan los procedimientos adquiridos en etapas anteriores. En primero, una de estas actividades es siempre un problema de alguna edición del **concurso de primavera**.

Los saberes de la unidad se desarrollan de manera clara y ordenada, distribuidos por epígrafes en los que aparecen destacadas las ideas fundamentales, acompañadas de ejemplos y actividades para practicar lo explicado.

1 Polígonos

Denominamos polígono a la porción del plano limitada por una línea poligonal cerrada. Sus elementos principales son:

- Lados:** cada uno de los segmentos que lo limitan: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} ...
- Vértices:** puntos de intersección de dos lados contiguos: A , B , C ...
- Ángulos:** ángulo determinado por dos lados consecutivos: \widehat{ABC} ...
- Diagonales:** segmentos que unen dos vértices no consecutivos: \overline{AC} ...

Un caso particular de polígonos son los polígonos regulares.

Los polígonos regulares son los que tienen sus ángulos y lados iguales.

En los polígonos regulares distinguimos también:

- Centro:** punto equidistante de los vértices y lados del polígono.
- Radio:** segmento que une el centro con un vértice.
- Apotema:** segmento perpendicular al lado que une el centro con el punto medio del lado.

Podemos clasificar los ángulos de un polígono en:

- Ángulo central:** formado por dos radios consecutivos con vértice en el centro del polígono.
- Ángulo interior:** formado por dos lados consecutivos.
- Ángulo exterior:** formado por un lado y la prolongación de su contiguo.

Podemos clasificar los polígonos por diferentes características:

Clasificación de los polígonos	
Número de lados	Tipo de ángulos interiores
Triángulo 3 lados	Convexo Cóncavo
Cuadrilátero 4 lados	
Pentágono 5 lados	
Hexágono 6 lados	

Todos sus ángulos interiores miden menos de 180° .
Alguno de sus ángulos interiores mide más de 180° .

Practica y aprende

- Indica cuáles de las figuras planas del margen son polígonos.

1.1. Ángulos de un polígono regular

- Ángulos centrales.** Dado que la unión de todos los ángulos centrales de un polígono de n lados forman un ángulo completo, la medida de cada uno de ellos es: $\widehat{\alpha}_c = \frac{360^\circ}{n}$
- Ángulos interiores.** Observa que un polígono de n vértices se puede triangular formando $n - 2$ triángulos. Como la suma de los ángulos de un triángulo es 180° , entonces, la de los ángulos de un polígono regular es $180^\circ \cdot (n - 2)$. Ahora bien, como en los polígonos regulares todos los ángulos interiores miden lo mismo la medida de uno de ellos es: $\widehat{\alpha}_i = \frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$
- Ángulos exteriores.** Los ángulos interiores y exteriores de un polígono son suplementarios por lo tanto, la medida de un ángulo exterior es: $\widehat{\alpha}_e = 180^\circ - \widehat{\alpha}_i = \frac{360^\circ}{n}$

Ejemplo

Calculamos el valor de todos los ángulos de un pentágono regular:

- Ángulo central: $\widehat{\alpha}_c = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$
- Ángulo interior: $\widehat{\alpha}_i = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$
- Ángulo exterior: $\widehat{\alpha}_e = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$
- Suma ángulos interiores: $\Sigma \widehat{\alpha}_i = 180^\circ \cdot (5 - 2) = 540^\circ$
- Suma ángulos interiores y exteriores: $\Sigma (\widehat{\alpha}_i + \widehat{\alpha}_e) = 180^\circ \cdot 5 = 900^\circ$

1.2. Diagonales de un polígono

Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos, entonces, desde cada uno de los vértices de un polígono se podrán trazar $n - 3$ diagonales. Así, para un polígono de n lados, teniendo en cuenta que una diagonal une dos vértices, tenemos:

El número de diagonales de un polígono de n lados es:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Ejemplo

El número de diagonales de un pentágono será: $d = \frac{5 \cdot (5 - 3)}{2} = 5$

Practica y aprende

- Dibuja un hexágono regular y señala en él sus elementos principales. Calcula el valor de todos sus ángulos y la suma de estos. ¿Cuántas diagonales tiene?

Nuestro proyecto

Para recordar

FIGURAS PLANAS ELEMENTALES

Región del plano delimitada por una línea poligonal cerrada. Sus elementos son lados, vértices, ángulos y diagonales. En los polígonos regulares distinguimos también el centro, radio y apotema. Los polígonos se clasifican según:

- Su número de lados: triángulos, cuadriláteros, pentágonos, hexágonos...
- La medida de sus ángulos: cóncavo y convexo.

Ángulos centrales: $A_i = \frac{360^\circ}{n}$
 Ángulos interiores: $A_i = \frac{180^\circ(n-2)}{n} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$
 Ángulos exteriores: $A_i = 180^\circ - A_i$

Clasificación de los triángulos

	Medida lados		Medida ángulos														
Triángulos	Equilátero	Isósceles	Escaleno	Acutángulo	Rectángulo												
	Obtusángulo																
	todos sus lados y ángulos son iguales																
	Dos lados y ángulos iguales y uno desigual																
	Tres lados y ángulos diferentes																
Todos sus ángulos son agudos																	
Uno de sus ángulos es recto (90°)																	
Uno de sus ángulos es obtuso (más de 90°)																	
Se pueden construir triángulos:																	
<ul style="list-style-type: none"> Conociendo las longitudes de sus tres lados. Conociendo las longitudes de dos de sus lados y la amplitud del ángulo que forman. Conociendo las amplitudes de dos ángulos y la longitud de uno de sus lados. 																	
Cuadriláteros	Paralelogramos: cuatro lados paralelos dos a dos y ángulos opuestos iguales. Las diagonales se cortan en el centro del polígono.																
	Los paralelogramos se clasifican en: cuadrado, rectángulo, rombo y romboido.																
Cuadriláteros	Trapezoides: cuatro lados con dos paralelos (bases). Los ángulos que forman los lados no paralelos con sus bases son suplementarios.																
	Los trapezoides se clasifican en: isósceles, rectángulo y escaleno.																
Cuadriláteros	Trapezoides: polígonos de cuatro lados no paralelos.																
	La circunferencia está formada por los puntos que equidistan de un único punto llamado centro, C , una determinada distancia llamada radio, r . El círculo es la figura plana formada por la circunferencia y todos los puntos interiores a ella.																
Circunferencia y círculo	Punto-circunferencia		Recta-circunferencia		Dos circunferencias												
	Interior	Exterior	Secante	Tangente													
<table border="1"> <thead> <tr> <th></th> <th>Semirrectas</th> <th>Diferencias</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Paralelogramo trapezoides</td> <td>...</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>Trapezoides - paralelogramo</td> <td>...</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>Paralelogramo - trapezoides</td> <td>...</td> <td>...</td> </tr> </tbody> </table>							Semirrectas	Diferencias	Paralelogramo trapezoides	Trapezoides - paralelogramo	Paralelogramo - trapezoides
	Semirrectas	Diferencias															
Paralelogramo trapezoides															
Trapezoides - paralelogramo															
Paralelogramo - trapezoides															

Al final del desarrollo de cada unidad, se incluye un cuadro denominado **Para recordar** a modo de síntesis de los saberes abordados.

Unas páginas de actividades llamadas **Para practicar** contienen numerosos ejercicios y problemas, dispuestos en dos columnas, diseñados para afianzar, consolidar y ejercitar los conceptos, algoritmos, resultados... estudiados. Entre estos, en primero, los marcados con un asterisco son los que presentan mayor dificultad. En el resto de cursos, el profesorado encuentra la graduación de las actividades en el manual del docente (esto evita que el alumnado pueda desmotivarse al conocer las actividades que por su nivel le proponen). Además se incluyen ocho tipos de actividades cooperativas señaladas mediante un símbolo y un número.

Una sección, **Curiosidades matemáticas**, puede ser trabajada con diversas metodologías, como el **aprendizaje cooperativo**, para favorecer la adquisición de las distintas competencias. En esta sección se apoya la reflexión con herramientas TIC, con elementos manipulativos, con juegos... para asegurar la comprensión de los conceptos.

Para practicar

20. Si uno de los ángulos de un paralelogramo mide 36°, ¿cuánto mide el resto de los ángulos?

21. Halla el valor de los ángulos central, interior y exterior de cada uno de los siguientes polígonos regulares:

- Triángulo.
- Hexágono.
- Octógono.
- Decágono.
- Enneágono.
- Dodecágono.

¿Cuántas diagonales tiene cada uno de los polígonos?

22. **Completar las siguientes tablas:**

	Semirrectas	Diferencias
Paralelogramo trapezoides
Trapezoides - paralelogramo
Paralelogramo - trapezoides

23. Indica el nombre de los siguientes ángulos con respecto a la circunferencia en cada caso:

-
-
-
-
-
-

24. Señala tres radios, tres cuerdas y un diámetro en la siguiente figura.

25. Indica la posición relativa de cada una de estas rectas respecto a la circunferencia:

-
-
-
-
-
-

26. Indica la posición relativa de los siguientes pares de circunferencias:

-
-
-
-
-
-

27. Las distancias de los puntos A, B, C, D y E al centro de una circunferencia de radio 10 cm son, respectivamente, 12, 10, 7, 5 y 13 cm. ¿Qué posición ocupan dichos puntos respecto de la circunferencia?

28. Las distancias del centro de una circunferencia de radio 8 cm a las rectas s, t, p y q son, respectivamente, 9, 5, 8, 7 y 10 cm. ¿Cuáles son las posiciones relativas de las rectas y la circunferencia?

29. Dadas dos circunferencias de radios 10 y 6 cm, ¿cuáles son, en cada caso, las posiciones relativas de las dos circunferencias, si las distancias entre sus centros son: 20, 13, 16, 50 y 18 cm?

Situación de aprendizaje

30. ¿Todos los edificios tienen las paredes rectas?

- Estos edificios tienen nombre. ¿Podrías investigar cuáles son? (Pista: uno es chino y el otro alemán).
- ¿Cómo definirías la forma de cada uno de ellos?
- ¿A qué obedice este tipo de diseño?
- En grupos de 4, realizad un mural con edificios singulares próximos, explicando sus peculiaridades.
- Después de haber trabajado esta unidad, ¿cuál dirías que es la relación entre estos tres conceptos?

Elabora una redacción de unas 100 palabras para explicarlo.

Geometría ↔ **Arquitectura** ↔ **Álgebra**

Autoevaluación

1. Halla el valor de los ángulos central, interior y exterior de cada uno de los siguientes polígonos regulares:

- Cuadrilátero.
- Pentágono.
- Isodécagono (20 lados).

¿Cuántas diagonales tienen cada uno de los polígonos?

2. Determina la amplitud del ángulo que falta en cada uno de los siguientes polígonos:

-
-

3. Dibuja un triángulo que cumpla cada una de las siguientes condiciones:

- Las longitudes de sus lados son 6 cm, 8 cm y 10 cm.
- La longitud de uno de sus lados es 5 cm y sus ángulos consecutivos 40° y 60°.
- La longitud de dos lados consecutivos son 4 cm y 7 cm y el ángulo que forman tiene una amplitud 60°.

4. Se divide una circunferencia en ocho partes iguales y se numeran 1, 2, 3, 4...

- Si se unen las divisiones 1, 3, 6, 8, 1, ¿qué clase de cuadrilátero se forma?
- Si se unen las divisiones 1, 2, 5, 6, 1, ¿qué clase de cuadrilátero se obtiene? ¿Cuánto miden sus ángulos?

5. Si se divide una circunferencia en diez partes iguales y se numeran las divisiones, ¿qué clase de polígono se obtiene uniendo las divisiones 1, 3, 5, 7, 9, 1? ¿Cuánto miden sus ángulos?

6. Dibuja una circunferencia y las siguientes rectas en las posiciones indicadas:

- Recta y secante.
- Recta y exterior.
- Recta y tangente.

7. Dibuja dos circunferencias en las disposiciones que se indican:

- Secantes.
- Tangentes interiores.
- Tangentes exteriores.
- Exteriores.
- Una interior a otra.

8. ¿Cómo es la recta que une dos puntos que están situados a 18 y 12 cm del centro de una circunferencia de 15 cm de radio? ¿Y la recta que une dos puntos que están a 25 y 0 cm del centro de una misma circunferencia?

9. ¿Pueden tener dos circunferencias una única tangente común? ¿En qué casos?

10. ¿Cómo son entre sí dos circunferencias de radios iguales a 10 cm y si la distancia entre sus centros es también 10 cm? ¿Y si es 20 cm? ¿Y si es nula?

Curiosidades matemáticas

Proyecto

Construir algunos polígonos con GeoGebra.

GeoGebra presenta dos herramientas muy útiles para la construcción de polígonos.

- Polígono:** Se crean los vértices del polígono, pinchando, uno a uno volviendo al primero.
- Polígono regular:** Hemos de seleccionar dos vértices consecutivos y a continuación introducir el número de lados del polígono buscado.

Actividad 1

Con las herramientas anteriores construye un decágono regular. Después construye el polígono que resulta de unir 5 vértices alternos del decágono anterior.

- Con la siguiente herramienta puedes obtener la amplitud de un ángulo.

Ángulo: Hemos de seleccionar tres puntos o dos rectas.

Actividad 2

Vamos a comprobar que el pentágono que hemos construido en el ejercicio anterior es regular, para ello veremos que todos sus ángulos son iguales, empleando la herramienta ángulo.

- A continuación, te mostramos un par de herramientas con las que podrás realizar la construcción de un triángulo equilátero, aprendida en la unidad.

Circunferencia (centro-punto): Seleccionamos dos puntos: el centro de la circunferencia y un punto por el que pasa.

Intersección: Seleccionamos los dos objetos a intersecar.

Actividad 3

Dibuja dos puntos cualesquiera A y B y construye un triángulo equilátero que los tenga por vértices.

Actividad 4

Sigue los siguientes pasos para construir un octógono regular.

- Dibuja un cuadrado y sus dos diagonales.
- Dibuja las 8 bisectrices de los ángulos formados por un lado del cuadrado y la diagonal. Puedes trazarlas tal y como aprendiste en la unidad 8 o empleando la herramienta bisectriz.
- Determina los puntos de corte de las bisectrices trazadas.
- Señala el octógono regular que has obtenido en el centro del cuadrado cuyos vértices son los 8 puntos de corte de las bisectrices.
- Observa los puntos de corte de las bisectrices y verás que puedes encontrar otros 8 puntos que forman otro octógono regular.

Curiosidades matemáticas

Proyecto

Construir un mosaico con figuras geométricas conocidas.

Determinamos mosaico al recubrimiento del plano mediante figuras geométricas llamadas **teelas**. Para que un recubrimiento del plano con figuras geométricas pueda considerarse como tal se deben cumplir dos condiciones:

- Las figuras no pueden superponerse.
- No pueden quedarse huecos sin cubrir.

Aislamiento, el número de mosaicos que se pueden construir es limitado. Un claro ejemplo de ello son los mosaicos que decoran las paredes de la Alhambra (Granada), obra cumbre del arte musulmán en Europa.

En función del número de polígonos diferentes empleados con la construcción del mosaico, podemos distinguir numerosos tipos:

Actividad 1

El más sencillo de todos es el **mosaico regular**.

Los mosaicos regulares están formados por un único tipo de polígono regular y estos concurren en los vértices (triángulo equilátero, cuadrado y hexágono).

Construye con GeoGebra un mosaico regular, usando una disposición diferente a la anterior, con triángulos equiláteros y otros dos con hexágonos, juega con los colores para hacer tu mosaico.

Al final de la sección **Para practicar**, se incluye de manera sistemática una **Situación de aprendizaje**, esto es, una tarea de carácter significativo y colaborativo orientada al desarrollo de las competencias.

Una página de **Autoevaluación** permite comprobar los progresos realizados.