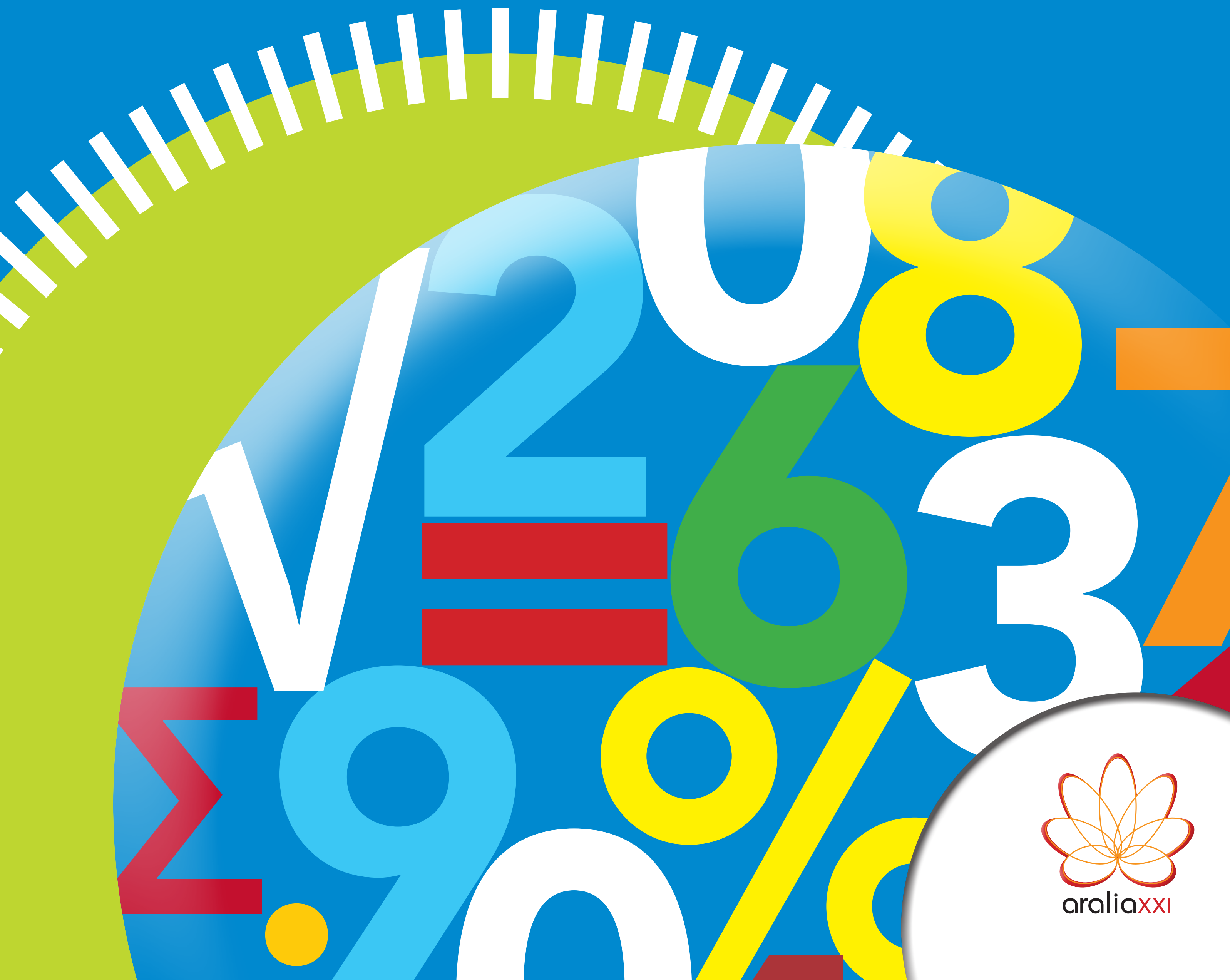
Matemáticas

Repasa y aprueba

2º ESO



araliaXXI

Matemáticas

Repasa y aprueba

2º ESO

Autores
Pedro Ortega Pulido
Laura Mollejo Villasevil

Jefe de ediciones
Fadel Akhamlich Campos

Edición
Ana Colera Cañas

Responsable maquetación
Esther Bermejo Vez

Maquetación
Aralia XXI

Corrección numérica
Óscar Reynaldo Madiedo Castro

Diseño de cubiertas
Aralia XXI

Diseño de interiores
Aralia XXI

Ilustraciones
Ana Colera Cañas

Aralia XXI es un sello editorial de Grupo APYCE

Grupo APYCE
c/ Uranio, 5, Pol. Ind. San José de Valderas
28918 Leganés (Madrid)

Tel./Fax: 916 19 32 60
www.librosapyce.com
info@librosapyce.com

Cuaderno
ISBN: 978-84-16474-02-8
Depósito legal: M-27115-2015
Solucionario
ISBN: 978-84-16474-03-5
Depósito legal: M-27116-2015
Impreso en España

Índice

8 Sistemas de ecuaciones lineales

8.1 Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación de la forma:

$$ax + by = c$$

donde ***x*** e ***y*** son las incógnitas y ***a, b*** y ***c*** son números. **Los coeficientes** son los números *a* y *b* y **el término independiente** es *c*.

Ejemplos. $4x - 5y = 8$ es una ecuación lineal con dos incógnitas.
$4x^2 + 3y = 9$ **no** es una ecuación lineal, ya que aparece el término $4x^2$.

Un sistema de dos ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas es un par de ecuaciones lineales que tienen las mismas incógnitas. Se pueden reducir a la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Donde ***a, b, c, d, e*** y ***f*** son números reales.

Los coeficientes del sistema son *a, b, d* y *e*. Los **términos independientes** son *c* y *f*.

Las incógnitas del sistema son *x* e *y*.

Ejemplo. En el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$

Los coeficientes del sistema son: 1, 2, 3, –1.

Los términos independientes son: 5 y 1.

Las incógnitas son: *x* e *y*.

1 Indica si las siguientes ecuaciones con dos incógnitas son, o no, lineales:

a. $4x - 5y = 8$ ______

b. $-8x + y = 0$ ______

c. $2x^2 + 5y^2 = 4$ ______

d. $4xy - 5 = y$ ______

e. $5x - y^5 = 4$ ______

f. $x + y = 8$ ______

2 Completa en la siguiente tabla los coeficientes, los términos independientes y las incógnitas de los sistemas de ecuaciones lineales dados.

Sistema	Coeficientes	Términos independientes	Incógnitas
$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$			
$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ 3a - 5b = -2 \end{cases}$			
$\begin{cases} 4x + 2y = -12 \\ -x + y = -5 \end{cases}$			

8.2 Soluciones de un sistema de ecuaciones lineales

La solución de una ecuación lineal con dos incógnitas es un par de valores que convierten la ecuación en una igualdad al sustituir las incógnitas por los valores.

Las ecuaciones lineales tienen infinitas soluciones.

Ejemplo. La ecuación $x + y = 5$ tiene como soluciones:

$x = 1, y = 4$; $x = 2, y = 3$; $x = -5, y = 10$...

Hay infinitos pares de valores que satisfacen la ecuación, todos los pares de números cuya suma sea 5.

La solución de un sistema de dos ecuaciones lineales de primer grado con dos incógnitas es un par de números que verifican las dos ecuaciones.

Ejemplo. Para comprobar que $x = 1$ e $y = 1$ es una solución del sistema de ecuaciones:

$\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ se sustituyen los valores en ambas ecuaciones: $\begin{cases} 3 \cdot 1 - 1 = 2 \\ 1 + 2 \cdot 1 = 3 \end{cases}$

Se comprueba que son solución de las dos.

Los sistemas de ecuaciones lineales pueden no tener solución, en cuyo caso decimos que el sistema es **incompatible.**

Ejemplo. El sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$ no tiene solución. Está claro que la suma de dos números no puede valer a la vez 2 y 3.

Los sistemas de ecuaciones que tienen solución se llaman sistemas **compatibles.**

3 Determina si los siguientes pares de valores son soluciones de cada uno de los sistemas de ecuaciones indicados:

a. $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$ $x = 2, y = 1$ ______

b. $\begin{cases} 3x + 5y = 23 \\ x + 3y = 3 \end{cases}$ $x = 1, y = 4$ ______

c. $\begin{cases} -x + 2y = 5 \\ 4x - 5y = -8 \end{cases}$ $x = 3, y = 4$ ______

d. $\begin{cases} 4x + 5y = 7 \\ 2x - 7y = -20 \end{cases}$ $x = 1, y = 3$ ______

e. $\begin{cases} 5x + 7y = 49 \\ -2x - y = -7 \end{cases}$ $x = 0, y = 7$ ______

f. $\begin{cases} -3x + 5y = 7 \\ 4x + y = 6 \end{cases}$ $x = 1, y = 2$ ______

4 Determina si los siguientes sistemas son compatibles o incompatibles:

a. $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ x + 5y = -3 \end{cases}$ ______

b. $\begin{cases} x + 5y = 3 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$ ______

c. $\begin{cases} 4x + y = 8 \\ 8x + 2y = 2 \end{cases}$ ______

d. $\begin{cases} 5x - 3y = 10 \\ x + 5y = 3 \end{cases}$ ______

8.3 Sistemas equivalentes

Dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones.

Ejemplo. Los sistemas $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$ y $\begin{cases} 2x - 2y = 10 \\ 2x + y = 13 \end{cases}$ son equivalentes porque los dos tienen por solución $x = 6$, $y = 1$. Podemos comprobarlo:

Para el primer sistema: $6 - 1 = 5$; $2 \cdot 6 + 1 = 13$ se cumplen.

Para el segundo sistema: $2 \cdot 6 - 2 \cdot 1 = 12 - 2 = 10$; $2 \cdot 6 + 1 = 13$ se cumplen.

Para construir un sistema equivalente a uno dado podemos efectuar las siguientes operaciones con las ecuaciones lineales que lo componen:

a. Una ecuación lineal se puede sustituir por el producto de esta por un número.

b. Una ecuación lineal se puede sustituir por la suma de la ecuación lineal con la otra ecuación.

Ejemplos. Construir dos sistemas equivalentes al sistema $\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$.

Un sistema equivalente a este se puede obtener sustituyendo la primera ecuación por el producto de esta por el número 3: $\begin{cases} 3(4x + y) = 3 \cdot 6 \\ 5x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12x + 3y = 18 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

Otro sistema equivalente se puede obtener sustituyendo la segunda ecuación por la suma de la 1.ª y la 2.ª: $\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 5x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = 6 \\ (5x - y) + (4x + y) = 3 + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x + y = 6 \\ 9x = 9 \end{cases}$

5 Comprueba que estos sistemas son equivalentes y que tienen como solución la indicada en cada caso.

a. $\begin{cases} 6x + 2y = 16 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} 6x + 2y = 16 \\ 8x + y = 18 \end{cases}$ $x = 2$, $y = 2$. ____________________

b. $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ -x + 5y = 11 \end{cases}$, $\begin{cases} 3x - y = -5 \\ 2x - 10y = -22 \end{cases}$ $x = -1$, $y = 2$. ____________________

6 Construye dos sistemas equivalentes a los sistemas dados realizando la operación indicada en cada caso.

Sistema de ecuaciones	Ecuación 1.ª = 1.ª × 2	Ecuación 2.ª = 2.ª × (−1)	Ecuación 1.ª = 1.ª + 2.ª
$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 3x - 2y = 19 \end{cases}$			
$\begin{cases} 4x - 7y = 23 \\ -x + y = -7 \end{cases}$			
$\begin{cases} -x + 2y = 6 \\ 4x - 7y = -20 \end{cases}$			

8.4 Método de reducción

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de reducción se realizan los siguientes pasos:

Se elige una de las dos incógnitas y se observan los coeficientes que tiene. Se construye un sistema equivalente; multiplicando la 1.ª ecuación por el coeficiente de la 2.ª ecuación y multiplicando la 2.ª ecuación por opuesto del coeficiente de la 1.ª ecuación. El objetivo es tener un sistema equivalente que tiene los coeficientes de la incógnita seleccionada iguales pero con signo contrario.	Ejemplo. $\begin{cases} 5x+3y=4 \\ 3x-2y=10 \end{cases}$ Seleccionamos la incógnita x. Tiene de coeficientes 5 en 1.ª ecuación y 3 en la 2.ª ecuación. Multiplicamos. La 1.ª ecuación por 3 y la 2.ª ecuación por −5. Obtenemos el sistema equivalente: $\begin{cases} 15x+9y=12 \\ -15x+10y=-50 \end{cases}$
Se suman las dos ecuaciones obtenidas, y así eliminaremos una de las incógnitas.	$\begin{array}{r} 15x+\ \ 9y=12 \\ -15x+10y=-50 \\ \hline 0x+19y=-38 \end{array} \Rightarrow 19y=-38$
Se resuelve la ecuación resultante (con una sola incógnita).	Despejando y: $y=-\frac{38}{19} \Rightarrow y=-2$
Se sustituye el valor obtenido en una de las dos ecuaciones iniciales para calcular el valor de la otra incógnita.	Sustituimos en la primera ecuación y por −2: $5x+3\cdot(-2)=4 \Rightarrow 5x-6=4 \Rightarrow 5x=10$ Despejamos x: $x=2$ Hemos obtenido: $x=2$, $y=-2$
Se comprueba que la solución verifica las dos ecuaciones iniciales.	$\begin{cases} 5\cdot2+3\cdot(-2)=10-6=4 \\ 3\cdot2-2\cdot(-2)=6+4=10 \end{cases}$ La solución es: $x=2$, $y=-2$.

7 Resuelve los siguientes sistemas por el método de reducción y comprueba la solución:

a. $\begin{cases} 3x+y=17 \\ 5x-y=23 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x+4y=8 \\ 3x-2y=-20 \end{cases}$

b. $\begin{cases} -4x+y=11 \\ x+2y=4 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4x+2y=22 \\ -3x+5y=-10 \end{cases}$

8.5 Método de sustitución

Para resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de sustitución se siguen los siguientes pasos:

Se selecciona una de las incógnitas de cualquiera de las dos ecuaciones y se despeja expresándola en función de la otra. Se suele elegir la incógnita más sencilla de despejar.	Ejemplo. $\begin{cases} 5x+3y=4 \\ 3x-2y=10 \end{cases}$ Seleccionamos la incógnita x de la 1.ª ecuación y la despejamos en la ecuación $5x + 3y = 4$. $5x = 4 - 3y \Rightarrow x = \dfrac{4-3y}{5}$
Se sustituye la expresión obtenida para la incógnita anterior en la otra ecuación.	Sustituimos en la 2.ª ecuación x por $\dfrac{4-3y}{5}$: $3 \cdot \left(\dfrac{4-3y}{5}\right) - 2y = 10$
Se resuelve la ecuación obtenida que tiene solo una incógnita.	Quitamos denominadores, multiplicando la ecuación por 5: $5 \cdot 3 \cdot \left(\dfrac{4-3y}{5}\right) - 5 \cdot 2y = 5 \cdot 10 \Rightarrow 15 \cdot \left(\dfrac{4-3y}{5}\right) - 10y = 50 \Rightarrow$ $\Rightarrow 3 \cdot (4-3y) - 10y = 50$ Quitamos paréntesis: $12 - 9y - 10y = 50$ Transponemos y despejamos: $-9y - 10y = 50 - 12 \Rightarrow -19y = 38 \Rightarrow y = \dfrac{38}{-19} \Rightarrow y = -2$
Se sustituye el valor obtenido en una de las dos ecuaciones iniciales para calcular el valor de la otra incógnita.	$5x + 3 \cdot (-2) = 4 \Rightarrow 5x - 6 = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$ La solución es $x = 2$, $y = -2$
Se comprueba que la solución obtenida verifica las dos ecuaciones iniciales.	$\begin{cases} 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = 10 - 6 = 4 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) = 6 + 4 = 10 \end{cases}$ Por tanto, la solución del sistema es: $x = 2$, $y = -2$.

8 Resuelve los siguientes sistemas por el método de sustitución y comprueba la solución:

a. $\begin{cases} 5x-7y=-2 \\ 3x+y=4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x+3y=17 \\ 4x-y=13 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x+2y=10 \\ -2x-4y=-20 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 2x+3y=44 \\ 6x-8y=-38 \end{cases}$

8.6 Método de igualación

Para resolver un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas por el método de igualación se siguen los siguientes pasos:

Se despeja **la misma incógnita** en las dos ecuaciones. Podemos elegir cualquiera de las dos, habitualmente las que resulten más cómodas de despejar.	Ejemplo. $\begin{cases} 5x+3y=4 \\ 3x-2y=10 \end{cases}$ Despejamos x en la 1.ª ecuación: $5x = 4 - 3y \Rightarrow x = \dfrac{4-3y}{5}$ Despejamos x en la 2.ª ecuación: $3x = 10 + 2y \Rightarrow x = \dfrac{10+2y}{3}$
Se igualan las expresiones y se obtiene una ecuación lineal.	Las expresiones obtenidas para x se igualan: $\dfrac{4-3y}{5} = \dfrac{10+2y}{3}$
Se resuelve la ecuación resultante con una sola incógnita.	Quitamos denominadores multiplicando ambas por el m.c.m. (5, 3) = 15: $15 \cdot \dfrac{4-3y}{5} = 15 \cdot \dfrac{10+2y}{3} \Rightarrow 3(4-3y) = 5(10+2y)$ Quitamos paréntesis: $12 - 9y = 50 + 10y$ Trasponemos términos y despejamos: $-9y - 10y = 50 - 12 \Rightarrow -19y = 38 \Rightarrow y = -2$
Se sustituye el valor obtenido en una de las dos ecuaciones iniciales para calcular el valor de la otra incógnita.	$5x + 3(-2) = 4 \Rightarrow 5x - 6 = 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$
Se comprueba que la solución obtenida verifica las dos ecuaciones iniciales.	$\begin{cases} 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-2) = 10 - 6 = 4 \\ 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) = 6 + 4 = 10 \end{cases}$ Por tanto, la solución es: $x = 2$, $y = -2$.

9 Resuelve los siguientes sistemas por el método de igualación y comprueba la solución:

a. $\begin{cases} x+5y=18 \\ x-8y=-8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x+y=5 \\ 3x-y=20 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 4x+2y=4 \\ -5x-3y=-3 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x-3y=25 \\ 4x+2y=2 \end{cases}$

8.7 Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones

Para resolver problemas es necesario traducir los enunciados al lenguaje algebraico, y es posible que tengamos que resolver un sistema de ecuaciones para resolver el problema.

La resolución de problemas mediante sistemas requiere los siguientes pasos:

- Identificar las incógnitas que intervienen y nombrarlas con letras (x e y).
- Expresar mediante ecuaciones las relaciones existentes.
- Resolver el sistema de ecuaciones resultante.
- Interpretar la solución y observar si es coherente con el enunciado.

Ejemplo. La suma de dos números es 13 y su diferencia –3, ¿qué números son?

- Identificamos las incógnitas:

  x = 1.^{er} número.
  y = 2.º número.

- Expresamos las relaciones por dos ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 13 \\ x - y = -3 \end{cases}$.
- Resolvemos el sistema por el método más cómodo, en este caso reducción:

  Sumando las ecuaciones obtenemos: $2x = 10 \Rightarrow x = 5;\ 5 + y = 13 \Rightarrow y = 8$

- Los números son: 5 y 8.

10 Hemos llamado a un hotel para reservar una habitación. Nos han dado la siguiente información: «Disponemos de un total de 45 habitaciones entre habitaciones dobles e individuales. Además tenemos un total de 65 camas». ¿Podrías determinar cuántas habitaciones dobles e individuales hay en el hotel?

11 María tiene una colección de 90 CD's de flamenco y de rock. Si tiene el doble de CD's de música flamenca que de rock, ¿cuántos CD's tiene de cada tipo?

12 La edad de un padre hace cinco años era igual al triple de la edad que tiene actualmente su hija, pero dentro de veinte años la suma de las edades de los dos será siete veces la edad que tiene actualmente la hija. ¿Cuáles son las edades del padre y de la hija?

13 He ido a la compra y he comprado 10 kg de patatas y 2 kg de kiwis por un importe de 9 €. Mi hija dice que a ella le han cobrado en la misma tienda por 8 kg de patatas y 1 kg de kiwis, 6,6 €. ¿Cuál es el precio de 1 kg de patatas y 1 kg de kiwis en esa tienda?

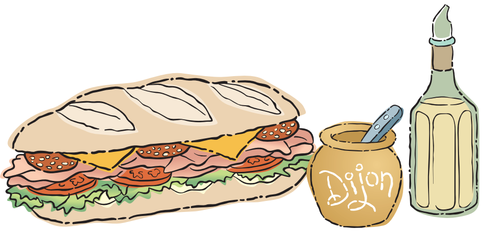
14 Lucía y Juan han invertido en bolsa en dos tipos de acciones *A* y *B*. Lucía ha invertido un total de 6 080 € y ha comprado 100 acciones de tipo *A* y 90 acciones de tipo *B*. Juan ha invertido un total de 2 956 € comprando 50 acciones tipo *A* y 38 acciones de tipo *B*. ¿Cuál es el precio de cada tipo de acciones?

15 Un fabricante de coches vende dos modelos de vehículos: de gama alta y de gama baja. Si el precio se mantiene constante y una semana ha vendido 6 de gama alta y 10 de gama baja obteniendo unos ingresos de 164 000 € y la siguiente semana ha vendido 9 de gama alta y 9 de gama baja con unos ingresos de 198 000 €, ¿cuál es el precio de los vehículos de cada modelo?

Problemas

1. La suma de dos números es 33 y el doble del primero más el triple del segundo suman 87. ¿Cuáles son esos números?

2. En la cafetería del instituto nos cobran por dos bocadillos y un refresco 2,9 € y por un bocadillo y dos refrescos 2,5 €. ¿Cuánto cuesta un bocadillo? ¿Cuánto cuesta un refresco?



3. Para conseguir 15 kg de café mezcla a un precio de 10 €/kg, ¿qué cantidades de café hay que comprar si vamos a mezclar dos tipos, uno de calidad superior a 12 €/kg y otro de una calidad inferior a 6 €/kg?

4. ¿Qué cantidades de aceite de oliva virgen extra a 4 €/l y de otro de aceite de oliva normal a 2 €/l habría que emplear para obtener 20 l y que la mezcla saliera a 3 €/l?

5. Un examen consta de 50 preguntas de tipo test. Cada pregunta acertada suma 2 puntos y cada pregunta errónea resta 1 punto. Si la puntuación que hemos obtenido es de 70 puntos, ¿cuántas preguntas hemos acertado y cuántas hemos fallado?

Autoevaluación

1. El término independiente de la ecuación lineal $3x + 2y = 8$ es:

a. 3 b. 2 c. 8 d. 0

2. Los coeficientes de la ecuación lineal con dos incógnitas $4x - 7y = 3$ son:

a. 4 y 7
c. 4 y 3
b. 4 y −7
d. −7 y 3

3. De los siguientes pares, ¿cuál **no** es solución de la ecuación lineal $x + y = 8$?

a. 3 y 5
c. 7 y −1
b. 6 y 2
d. 9 y −1

4. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones **no** es lineal?

a. $3x + 2y = 5$
c. $4xy - y = 8$
b. $-3x + 6y = 8$
d. $6x + 3y = 2$

5. Indica cuál de los siguientes sistemas **no** tiene solución (es incompatible).

a. $\begin{cases} x - y = 5 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$
c. $\begin{cases} x - y = 5 \\ x - y = 9 \end{cases}$
b. $\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x - y = 0 \end{cases}$
d. $\begin{cases} 9x + 2y = 0 \\ 3x + y = 3 \end{cases}$

6. Indica cuál de los siguientes sistemas **no** es equivalente a $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

a. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$
c. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x = 5 \end{cases}$
b. $\begin{cases} 2x - 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{cases}$
d. $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$

7. Indica cuál sería el mejor método para resolver el sistema $\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$.

a. Igualación
c. Reducción
b. Sustitución
d. Deducción

8. Indica cuál sería el mejor método para resolver el sistema $\begin{cases} x = 2 + 3y \\ 2x + y = 3 \end{cases}$.

a. Reducción
c. Igualación
b. Sustitución
d. Compleción

9. Indica cuál será el mejor método para resolver el sistema $\begin{cases} x = y + 2 \\ x = 2y + 8 \end{cases}$.

a. Reducción
c. Igualación
b. Sustitución
d. Compleción

10. ¿Cuál es la solución del sistema $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$?

a. $x = 1, y = 0$
c. $x = 2, y = 1$
b. $x = 1, y = 2$
d. $x = 1, y = 1$

11. La suma de dos números es 5 y su diferencia 1, ¿cuáles son los números?

a. 1 y 4
c. 8 y −3
b. 2 y 3
d. 9 y −4

12. Las edades de Ana y María suman entre las dos 42 años y María tiene 4 años más que Ana. ¿Qué edades tienen María y Ana?

a. 20 y 21
c. 18 y 24
b. 19 y 23
d. 17 y 25

13. ¿Qué sistema plantearías para resolver el siguiente problema: «La suma de dos números es 113 y su diferencia 49»?

a. $\begin{cases} x + y = 113 \\ x - y = 49 \end{cases}$
c. $\begin{cases} 2x - y = 113 \\ x - 2y = 49 \end{cases}$
b. $\begin{cases} x + y = 49 \\ x - y = 113 \end{cases}$
d. $\begin{cases} 2x + 2y = 226 \\ x - y = 98 \end{cases}$